

# 手持振动机械与手臂耦合系统主共振研究

杨志安<sup>1a</sup>, 王思奇<sup>2</sup>, 李高峰<sup>1b</sup>

- (1. 唐山学院 a. 唐山市结构与振动工程重点实验室; b. 基础部, 河北 唐山 063000;  
2. 华北理工大学 机械工程学院, 河北 唐山 063210)

**摘要:**为研究振动对人体的影响,以人体手臂系统为研究对象,分析振动机械对人体手臂系统的影响。建立手持振动机械与人体手臂耦合系统的非线性振动方程,用多尺度法得到手持振动机械与人体手臂耦合振动系统主共振的一次近似解,并得出系统的时间响应曲线和相图与 Simulink 仿真得出的图作对比,发现大致相同。讨论了系统参数对主共振幅频响应曲线的影响:增大系统激励力,系统振幅和共振区域增大;增大系统阻尼,系统振幅减小。

**关键词:**手持振动机械;手臂;耦合系统;主共振;多尺度法

**中图分类号:**O32;TH113.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-349X(2021)03-0001-05

**DOI:**10.16160/j.cnki.tsxyxb.2021.03.001

## Research on the Primary Resonance of the Hand-Held Vibrating Machine and the Arm Coupling System

YANG Zhi-an<sup>1a</sup>, WANG Si-qi<sup>2</sup>, LI Gao-feng<sup>1b</sup>

- (1a. Tangshan Key Laboratory of Structure and Vibration Engineering;  
1b. Department of Fundamental Sciences Teaching, Tangshan University, Tangshan 063000, China;  
2. School of Mechanical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan 063210, China)

**Abstract:** In order to study the influence of vibration on the human body, the human arm system is taken as the research object and the influence of vibrating machinery on the system is analyzed in this paper. During the study, the nonlinear vibration equation of the hand-held vibrating machine and the human arm coupling system is established and the multi-scale method is used to obtain the first-order approximate solution to the primary resonance of the coupling vibration system. Then the time response curve and phase diagram of the system obtained from the equation and the figures from Simulink simulation are compared, which shows their rough sameness. The influence of the system parameters on the primary resonance frequency response curve is found that the system amplitude and resonance area increases with the increase of the excitation force, and the system amplitude decreases with the increase of the damping.

**Key Words:** hand-held vibrating machine; the arm; coupling system; primary resonance; multi-scale method

**作者简介:**杨志安(1963-),男,河北秦皇岛人,教授,博士,主要从事机电系统动力学研究。

手臂系统生物力学是理解振动引起疾病机制和评估振动暴露风险的重要基础。手是一个可储存动能与势能的弹性体,当手握振动机械手柄时,激励系统(手柄)与被激励系统(手)会发生能量的转移,由于手有阻尼会导致储存的势能以动能形式耗散,即手的组织会发生相对运动。产生的热量会对手的组织、血管等产生伤害,长此以往会导致部分使用振动机械的人患雷诺氏症(白指病)。为深入研究人体手臂振动与白指病发病机理的关系,需建立手持振动机械与人体手臂耦合系统振动方程。手臂系统中有很多非线性特性存在<sup>[1]</sup>,为了使人体手臂系统动力学模型更加准确,不能忽略非线性因素。

文献[2-3]建立了手臂系统线性模型,并分析了不同范围的频率与手臂系统不同部位响应之间的关系,研究表明,整个手臂对低频振动较为敏感,高频振动对手部影响较大。文献[4-5]建立了振动手柄和不同振动工具耦合的不同自由度手臂系统线性模型,分析了手臂系统的机械阻抗特性和振动功率吸收与外激励频率的关系,在较高振动频率下,振动功率大部分被手和手掌吸收。文献[6]探究了井窖孔制作机的手传振动,并建立了手臂系统二自由度振动模型,研究表明,人体手臂系统对振动能量的吸收随着振动能量的增加而增大,手臂前端吸收了振动所产生的绝大部分量。文献[7]测量和分析了手指和手掌的吸收功率,结果表明,手传振动能量吸收功率中高频信号与白指病有关,因为在高频率时大部分能量被手部吸收。文献[8]通过实验测试得出,人体在受到振动时确实存在非线性并且可能足够大,以至于无法进行线性假设。根据以上研究,有必要对手持振动机械与人体手臂耦合系统进行非线性建模。

## 1 人体手臂系统在简谐激励下的振动模型

手臂是由皮肤、皮下组织、肌肉和骨骼组成的复杂的非均匀系统。本文由简入繁,研究其非线性规律,以文献[9]提出的单自由度手臂系

统线性模型为基础建立非线性模型。选择文献[10]给出的标准生物力学建模坐标系,即坐标原点设在手的第三节掌骨处,如图 1(a)所示,探究 X 方向上的振动规律。采用单自由度弹簧阻尼质量模型描述手持振动机械与人体手臂耦合系统,如图 1(b)所示。

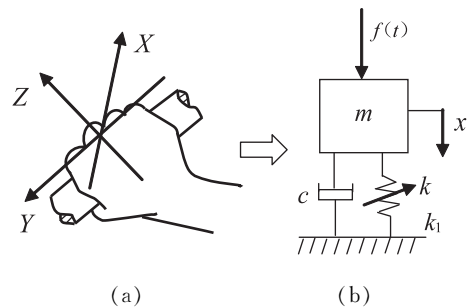


图 1 手臂振动模型

手臂系统是非线性的,设人体手臂系统非线性项为立方项,根据牛顿第二定律得到系统的动力学方程:

$$m\ddot{x}(t) + kx + c\dot{x} + k_1x^3 = f(t). \quad (1)$$

式中, $m$  为人体手部质量, $k$  为刚度, $k_1$  为手部非线性刚度, $c$  为手部阻尼, $f(t)$  为手部受到的外界激励。

其中手部受到的外界激励  $f(t)$  有多种情况。首先研究系统受简谐激励时的情况,即  $f(t) = f\cos \Omega t$ ,其中  $f$  为激励力幅值。进一步化简得:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{c\dot{x}}{m} - \frac{k_1x^3}{m} + \frac{f\cos \Omega t}{m}. \quad (2)$$

式中, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , $\omega_0$  为系统的固有频率。

## 2 耦合系统的主共振分析

主共振是指外激励频率  $\Omega$  接近派生系统固有频率  $\omega_0$  时产生的振动。非线性系统中的主共振和线性系统中的共振是不同的,在线性小阻尼系统中,即便是很小的激励  $f$  也可以引起强烈的共振。所以,在非线形系统中分析主共振时需对除线性项以外的其他项加以限制,在其前面冠以小参数  $\epsilon$ 。对式(2)进一步整理得:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon \left( \frac{c\dot{x}}{m} + \frac{k_1x^3}{m} - \frac{f\cos \Omega t}{m} \right). \quad (3)$$

本文用多尺度法研究方程的近似解。研究一次近似解时,采用两个时间尺度  $T_0, T_1$ , 设系统(3)具有如下形式的解:

$$x(t, \epsilon) = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) \quad (4)$$

式中,  $T_0 = t, T_1 = \epsilon T_0$ 。

记导数算子为  $D_0 = \frac{\partial}{\partial T_0}, D_1 = \frac{\partial}{\partial T_1}$ 。

将式(4)代入式(3),通过比较  $\epsilon$  同次幂的系数,得到一组线性偏微分方程:

$$\epsilon^0: D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = 0; \quad (5)$$

$$\epsilon^1: D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - \frac{c}{m} D_0 x_0 - \frac{k_1}{m} x_0^3 + \frac{f}{m} \cos \Omega t_0 \quad (6)$$

方程(5)的解为:

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \bar{A}(T_1) e^{-i\omega_0 T_0} \quad (7)$$

式中:

$$A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\beta(T_1)}, \bar{A}(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{-i\beta(T_1)} \quad (8)$$

研究系统主共振问题,也就是外界激励频率与固有频率接近时发生的情况,引入调谐参数  $\sigma$ , 则有:

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma, \sigma = 0(1) \quad (9)$$

将式(7)代入式(6)可得:

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = - \left[ 2i\omega_0 \left( D_1 A + \frac{cA}{2m} \right) + \frac{3k_1 A^2 \bar{A}}{m} \right] e^{i\omega_0 T_0} - \frac{k_1 A^3}{m} e^{3i\omega_0 T_0} + \frac{f e^{[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)]}}{2m} + cc \quad (10)$$

式中:

$$f \cos \Omega t = f \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) = \frac{f e^{[i(\omega_0 T_0 + \sigma T_1)]}}{2} + cc$$

$cc$  为共轭项。其中,消除永年项的条件为:

$$2i\omega_0 \left( D_1 A + \frac{cA}{2m} \right) + \frac{3k_1 A^2 \bar{A}}{m} - \frac{f e^{i\sigma T_1}}{2m} = 0 \quad (11)$$

将式(8)代入式(11),进行化简,分离其实部和虚部得:

$$\begin{cases} D_1 a = -\frac{ca}{2m} + \frac{f \sin \varphi}{2\omega_0 m} \\ a D_1 \varphi = \sigma a - \frac{3k_1 a^3}{8\omega_0 m} + \frac{f \cos \varphi}{2\omega_0 m} \end{cases} \quad (12)$$

式中:

$$\varphi = \sigma T_1 - \beta_0 \quad (13)$$

方程组(12)上下两式联立可解出  $a, \varphi$ , 于是方程(6)的一次近似解为:

$$x(t) = a(T_1) \cos(\omega_0 T_0 + \varphi) + O(\epsilon) \quad (14)$$

由稳态系统可知,  $D_1 a = 0, D_1 \varphi = 0$ , 即:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{ca}{2m} + \frac{f \sin \varphi}{2\omega_0 m} \\ 0 = \sigma a - \frac{3k_1 a^3}{8\omega_0 m} + \frac{f \cos \varphi}{2\omega_0 m} \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)可得稳态系统的幅频响应方程:

$$\left[ \frac{c^2}{m^2} + \left( 2\sigma - \frac{3k_1 a^2}{4\omega_0 m} \right)^2 \right] a^2 = \left( \frac{f}{\omega_0 m} \right)^2 \quad (16)$$

化简得:

$$J_1 a^6 + J_2 a^4 + J_3 a^2 + J_4 = 0 \quad (17)$$

式中:

$$J_1 = \frac{9k_1^2}{16\omega_0^2 m^2}, J_2 = \frac{-3k_1 \sigma}{m\omega_0}$$

$$J_3 = 4\sigma^2 + \frac{c^2}{m^2}, J_4 = \frac{-f^2}{m^2 \omega_0^2}$$

根据 Routh-Hurwitz 判据,可知稳态解稳定的充要条件是:

$$\frac{c^2}{4m^2} - \left( \frac{3k_1 a_0^2}{8\omega_0 m} - \sigma \right) \left( \frac{9k_1 a_0^2}{8\omega_0 m} - \sigma \right) > 0 \quad (18)$$

式(18)说明系统主共振稳态解与调谐参数有关,并说明对于系统主共振的幅频响应方程式(17),在一定的范围内可能存在三个稳态解,但是这些稳态解不一定是稳定的。

### 3 数值分析

#### 3.1 主共振幅频响应分析

为了定量求解,根据文献[11]给出人体手臂参数,给各参数赋值:

$$m = 0.45 \text{ kg}, c = 178 \text{ Ns/m}, k = 66.5 \text{ N/m}, k_1 = 6.65 \text{ N/m}, f = 10 \text{ N}$$

按照式(17)、式(18)计算系统主共振幅频响应曲线,并研究其稳定性。其中横坐标为调谐参数,纵坐标为振幅。

图 2 为手臂系统主共振随外激励力幅值  $f$  变化的幅频响应曲线。由图 2 可以看出,随着调谐值的不断增大,振幅并没有发生“跳跃”现象,也就是属于很弱的非线性问题。当增大外

激励力时,系统振幅幅值会随着外激励力的增大而增大,共振区域也随着增大,且共振区域变化较大。

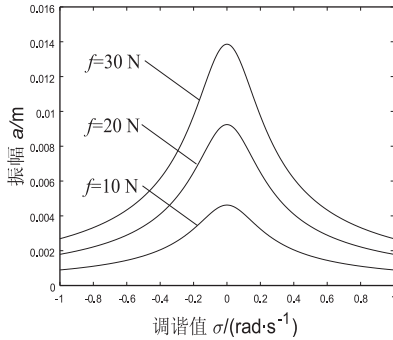


图 2 激励力不同时的幅频响应曲线

图 3 为手臂系统主共振随手部阻尼  $c$  变化的幅频响应曲线。由图 3 可以看出,随着阻尼系数  $c$  的不断增大,振幅并没有发生“跳跃”现象;随着手臂系统阻尼系数  $c$  的增加,系统受到的阻力增大,振幅幅值降低,共振区域变化较小。

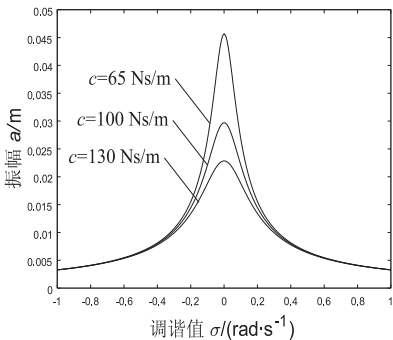


图 3 阻尼不同时的幅频响应曲线

图 4 为手臂系统主共振随非线性刚度  $k_1$  变化的幅频响应曲线。由图 4 可看出,手直接接触振动工具时,系统非线性刚度较小,曲线不会发生“跳跃”现象;当手戴防护设备时会增加系统非线性刚度,非线性刚度达到  $5.1 \times 10^6$  时,曲线会发生“跳跃”现象。此时,便不可忽略非线性项的影响,而且随着非线性刚度的不断增大,“跳跃”现象会更加明显。

图 5 为手臂系统在三种不同调谐值下的阻尼幅频响应曲线。由图 5 可以发现,随着阻尼增加系统振幅会不断减小。在一定范围内,振幅变化速率较快。

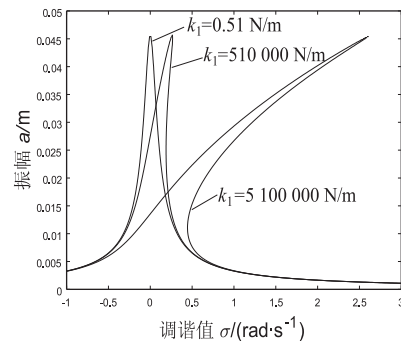


图 4 非线性刚度不同时的幅频响应曲线

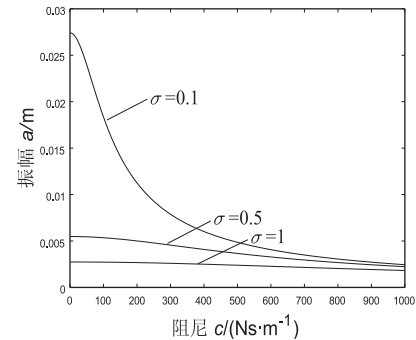


图 5 调谐参数不同时的阻尼幅频响应曲线

图 6 为手臂系统在三种不同调谐值下的激励力幅频响应曲线。由图 6 可以发现,随着外激励力  $F$  不断增大,振幅也会逐渐增大。

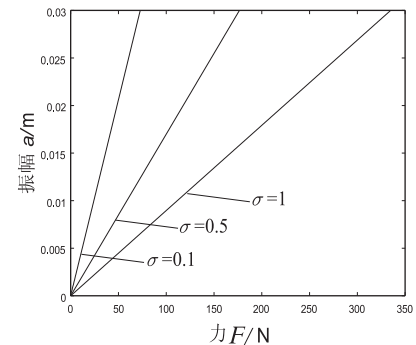


图 6 调谐参数不同时的激励力幅频响应曲线

### 3.2 主共振时间历程分析

设式(5)、式(6)线性微分方程的初始条件分别为:

$$x_0(0) = a, \dot{x}_0(0) = 0; \tag{19}$$

$$x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0. \tag{20}$$

将式(19)代入式(7),得  $\varphi = 0$ , 所以:

$$x_0 = a \cos \omega_0 T_0. \tag{21}$$

式(6)消除永年项得:

$$D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{k_1 A^3}{m} e^{3i\omega_0 T_0} + cc_0 \quad (22)$$

将式(8)代入式(22),并进行欧拉变换,解得:

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 T_0 + C_2 \sin \omega_0 T_0 + \frac{k_1 a^3}{32\omega_0^2 m}$$

$$\cos(3\varphi + 3\omega_0 T_0) \quad (23)$$

式中:  $C_1 = x_1(0) = 0, C_2 = \dot{x}(0)/\omega(0) = 0$ 。

解得主共振的一次近似解为:

$$x = x_0 + \epsilon x_1 \quad (24)$$

选取初始位移  $a = 0.008$ , 调谐值  $\sigma = 0.1$ , 其他值不变。应用 Matlab 软件, 根据四阶 Runge-Kutta 法(数值法)得到时间响应曲线及其相图, 并与 Simulink 仿真形成的图作比较。

图 7 和图 8 分别为数值法得到的时间响应曲线和相图。由图 7 可知, 随着时间增加, 系统主共振位移逐渐减小并趋于稳定。由图 8 可知, 随时间增加, 系统逐渐稳定, 形成了一个有一定厚度的极限环。图 9 与图 10 分别为 Simulink 仿真得到的时间响应曲线和相图, 与数值法得到的大致相同。

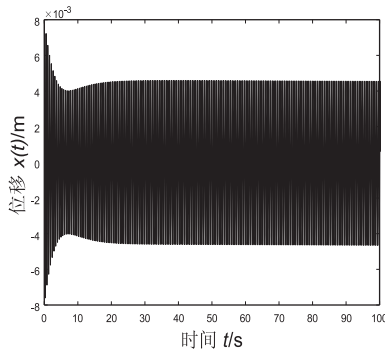


图 7 数值法时间响应曲线

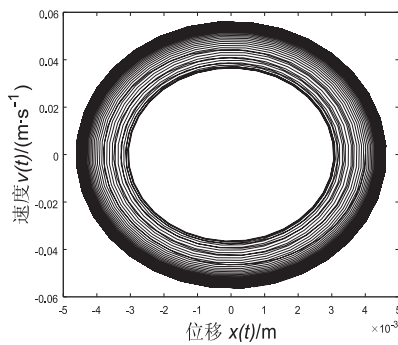


图 8 数值法相图

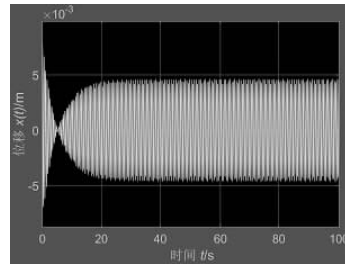


图 9 Simulink 仿真时间响应曲线

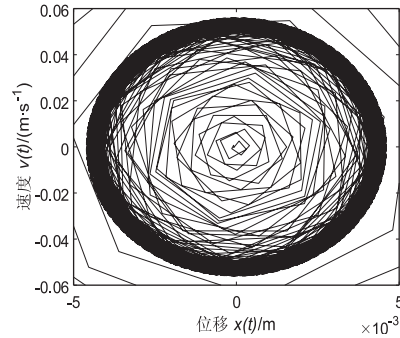


图 10 Simulink 仿真相图

## 4 结论

建立手持振动机械与人体手臂耦合系统动力学模型, 用多尺度法得到系统幅频响应曲线。分析系统各参数对主共振幅频响应曲线的影响, 可以得出, 单位时间内系统振幅变化较快, 这使得手部内各组织相对运动更加剧烈, 能量耗散于手部, 从而诱发雷诺氏症; 减小振幅可降低相对运动程度。因此, 对于预防此类职业病提出的建议为: 可通过减小外激励幅值来减小系统振幅; 可通过增加阻尼减小系统振幅; 还可以通过在特定频率段内使用振动机械来避免过大振幅。

## 参考文献:

- [1] WITTMANN T J, PHILLIPS N S. Human body non-linearity and mechanical impedance analyses [J]. Journal of Biomechanics, 1969, 2(3): 281 - 288.
- [2] DONG R G, DONG J H, WU J Z, et al. Modeling of biodynamic responses distributed at the fingers and the palm of the human hand-arm system [J]. Journal of Biomechanics, 2007, 40(10): 2335 - 2340. (下转第 21 页)

- [14] VENKATACHALAM P, RAVISANKAR B, KUMARAN S. Microstructure and mechanical properties of 2014 Al alloy processed by equal channel angular pressing (ECAP) [J]. *International Journal of Microstructure and Materials Properties*, 2010, 5(1): 88 - 100.
- [15] 许晓静, 王子路, 陆文俊, 等. 固溶—大变形—时效下 7085 铝合金的强化机理[J]. *稀有金属材料与工程*, 2017, 46(4): 1008 - 1012.
- [16] ZHANG Z, LIU M, YU Y, et al. Microstructural characterization of an Al-Mg-Si aluminum alloy processed by equal channel angular pressing [J]. *Materials Science Forum*, 2013, 745 - 746: 303 - 308.
- [17] KHELFA T, REKIK M A, MUÑOZ-BOLAÑOS J A, et al. Microstructure and strengthening mechanisms in an Al-Mg-Si alloy processed by equal channel angular pressing (ECAP) [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018, 95(1-4): 1165 - 1177.
- (责任编辑:李秀荣)
- 
- (上接第5页)
- [3] DONG R G, RAKHEJA S, SCHOPPER A W, et al. Hand-transmitted vibration and biodynamic response of the human hand-arm; a critical review [J]. *Critical Reviews TM in Biomedical Engineering*, 2001, 29(4): 393 - 439.
- [4] BESA A J, VALERO F J, SUNER J L, et al. Characterization of the mechanical impedance of the human hand-arm system; the influence of vibration direction, hand-arm posture and muscle tension [J]. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 2007, 37(3): 225 - 231.
- [5] ADEWUSI S, RAKHEJA S, MARCOTTE P, et al. Distributed vibration power absorption of the human hand-arm system in different postures coupled with vibrating handle and power tools [J]. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 2013, 43(4): 363 - 374.
- [6] 曹阳, 马雄位, 张永江, 等. 井窖孔制作机关键部件振动及其沿手臂传递特性研究 [J]. *中国农机化学报*, 2020, 41(2): 46 - 53.
- [7] DONG R G, SCHOPPER A W, MCDOWELL T W, et al. Vibration energy absorption (VEA) in human fingers-hand-arm system [J]. *Medical engineering & physics*, 2004, 26(6): 483 - 492.
- [8] KARNIEL A, INBAR G F. The use of a nonlinear muscle model in explaining the relationship between duration, amplitude, and peak velocity of human rapid movements [J]. *Journal of Motor Behavior*, 1999, 31(3): 203 - 206.
- [9] 李文彬, 安静贤. 人体手臂的机械阻抗与振动能量吸收 [J]. *北京林业大学学报*, 1995, 17(S2): 1 - 6.
- [10] 陈位宫. 人手臂振动的生物力学模型与振动病 [J]. *噪声与振动控制*, 1988(2): 33 - 39.
- [11] FRITZ M. An improved biomechanical model for simulating the strain of the hand-arm system under vibration stress [J]. *Journal of Biomechanics*, 1991, 24(12): 1165 - 1171.
- (责任编辑:李秀荣)