

基于 MLP 法的磁浮列车非线性系统的稳定性分析

杨志安¹, 崔佳磊²

(1. 唐山学院 唐山市结构与振动工程重点实验室, 河北 唐山 063000;

2. 华北理工大学 机械工程学院, 河北 唐山 063210)

摘要:以磁浮列车的垂向运动为研究对象, 研究其非线性系统的稳定性。选取气隙值、电流值为磁浮列车悬浮系统的广义坐标, 依据拉格朗日—麦克斯韦方程建立磁浮列车非线性悬浮系统的动力学模型, 得到的振动方程是三阶的强非线性负刚度微分方程。应用 MLP 法求得系统的共振永年项条件, 并对初始方程进行了数值计算, 得到了磁浮列车在空载、满载、过载情况下的悬浮系统振动时间响应曲线和相图, 结果表明: 随着列车质量的增加, 列车初始位移增加, 但列车启动后 50 s 的时间内, 系统振动趋于稳定。

关键词:磁浮列车; 拉格朗日—麦克斯韦方程; 非线性振动; MLP 法

中图分类号:O322; U266.4 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-349X(2019)03-0001-07

DOI:10.16160/j.cnki.tsxyxb.2019.03.001

Stability Analysis of Nonlinear Systems in the Maglev Train Based on MLP Method

YANG Zhi-an¹, CUI Jia-lei²

(1. Tangshan Key Laboratory of Structure and Vibration Engineering, Tangshan University, Tangshan 063000, China;

2. School of Mechanical Engineering, North China University of Science and Technology, Tangshan 063210, China)

Abstract: With the vertical motion of maglev train as the research object, the stability of its nonlinear system was studied. In the experiment, the air gap value and current value were selected as the generalized coordinates of the suspension system in the maglev train. By the dynamic model of the nonlinear suspension system established based on Lagrange-Maxwell equation, a third-order strongly nonlinear negative stiffness differential equation was obtained. After the amplitude frequency response condition of the system obtained by MLP method and the initial equation calculated numerically, the vibration time response curve and the phase diagram of the suspension system under no-load, full-load and overload conditions were achieved. The results show that with the weight of the train increasing, the initial displacement also increases, but the the vibration of the system tends to be stable in 50 seconds after its starting.

Key Words: maglev train; Lagrange-Maxwell equation; nonlinear oscillation; MLP method

基金项目:河北省高等学校科学技术研究项目(ZD2017307)

作者简介:杨志安(1963—), 男, 河北秦皇岛人, 教授, 博士, 主要从事机电耦合非线性动力学研究。

0 引言

磁浮列车通过电磁力将列车控制在一定高度,实现列车与轨道之间无机械接触,然后通过直线电机驱动列车。它具有速度快、爬坡能力强、能耗低、运行噪音低、安全、舒适、污染小等优点^[1]。磁浮列车的悬浮能力直接决定了车辆的承载能力,而悬浮能力的大小取决于悬浮控制系统。悬浮控制的基本要求是保证列车在各种内外干扰力作用下能够稳定的运行。

研究磁浮列车稳定性问题,首先要建立正确的动力学模型,磁浮列车属于机电磁耦合系统,拉格朗日—麦克斯韦方程是建立机电系统模型的一种核心方法。经典的拉格朗日—麦克斯韦方程是基于线性的电场能 W_e 和线性的磁场能 W_m ,以电荷、电流作为广义坐标得到的^[2]。2007 年文献[3]中推广了拉格朗日—麦克斯韦方程的应用范围,使之适合于电磁非线性情况。2012 年,文献[4]将机电系统的状态变量与力学系统的广义坐标相联系,得到了经典形式的拉格朗日—麦克斯韦方程,使机电分析动力学的核心内容更加完善。

MLP 法,是在摄动法小参数的基础上引入非小参数,小参数的来源是将非线性有关的参数利用幂级数进行展开,并且展开的要求是其后的每一项都要小于前一项。非小参数是由小参数变换而来。将非线性微分方程转化为线性随机微分方程组,最后用此方法就可以求解了。与等效线性化方法一样,MLP 法只能得到响应的时域信息,而不能得到响应的频域信息,因为非线性系统的频率没有可保存性,所以频域信息是不稳定的,理论上难以获得^[5]。

Wu 等人提出了一种基于 T-S 模糊数学模型的非线性电磁悬浮系统模糊控制方法,仿真结果表明,该方法在处理有界扰动时有效,但同时却增加了控制器设计的复杂度^[6]。施晓红等人从磁浮列车—轨道耦合的非线性特性的角度研究了静悬架条件下磁浮列车—轨道耦合系统的控制参数、轨道参数与振动特性之间的相关关系^[7]。杨霞等人研究了单磁悬浮系统,建立

了磁悬浮系统在平衡点的状态方程,并采用极点配置法使系统满足稳定性条件,在此基础上,对磁悬浮系统进行了数值模拟分析,最后得出结论,状态空间控制方法能有效地稳定磁悬浮系统^[8]。

在众多的磁浮系统研究中,学者们对转向架、电磁力、车—轨耦合振动、车辆运行稳定性以及悬架控制器的设计等问题进行了研究,主要研究方向集中在磁浮列车的线性系统上。本文主要根据拉格朗日—麦克斯韦方程建立关于磁浮系统的非线性动力学模型,利用 MLP 法来研究主共振的幅频响应方程。

1 磁浮列车悬浮系统动力学模型的建立

常导型磁浮列车悬浮系统简图如图 1 所示,列车的车厢下方装有电磁铁,电磁铁吸向“T”型钢轨,当电磁铁绕组中的电流及在电磁铁与钢轨间的气隙均为标称值的情况下,悬浮拉力和车厢的重力平衡。

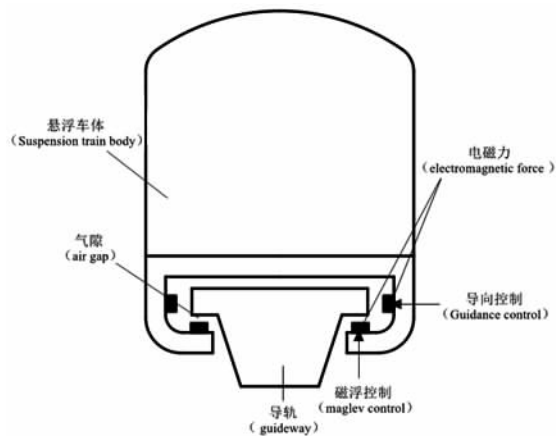


图 1 磁浮列车悬浮系统简图

当磁浮列车车厢沿铅垂轴方向做直线平动,且在通电之后处于平衡状态时,电磁铁与钢轨间的气隙为标称值,车厢质心与原点 O 重合。以 Δy 表示车厢的小位移,以 i 表示电磁铁绕组中的电流。所研究的磁悬浮机电系统的广义坐标为 $\Delta y, i$ 。磁浮系统的物理模型见图 2。

将悬浮车厢看作一个刚体,利用刚体平动的动能公式得到车厢的动能公式:

$$T = \frac{1}{2} m \Delta \dot{y}^2. \quad (1)$$

式(15)中,(b)式的第一项是非线性项,为钢轨间气隙的倒数与电流的变化率的乘积,(b)式的第二项同样是非线性项,(a)式的第三项也是非线性项,所以该方程组是一个三阶的非线性方程。因为其计算复杂,且不好处理,所以现阶段几乎没有学者对其非线性项进行详细的研究。

2 主共振分析

假设式(15)中 $u(t)=u_0 \cos \omega t$,也就是说将电压看作是激励电压, u_0 是常数,当车厢处于平衡位置时

$$\Delta y=0, \Delta \dot{y}=0, i=i_0, u(t)=u_0. \quad (16)$$

将式(16)代入式(15)可以得到 u_0 和 i_0 的值:

$$u_0=Ri_0; i_0^2=2mg/L_0, \quad (17)$$

式中 $L_0=\frac{\mu_0 SN^2}{2h}$ 是车厢处于平衡位置时的自感系数。

当车厢位移很小时,即 $\Delta y \ll h$ 时,磁铁中的电流和本生的标称值 i_0 相近,此时引入小参数 α ,此时式(15)中的电流 i 为:

$$i=i_0+\alpha x. \quad (18)$$

利用上述理论将式(15)化为:

$$\begin{cases} \ddot{y}-\gamma_1 y-\gamma_2 \alpha^2 x+\gamma_3 \dot{y}=0 \\ \gamma_4 \alpha^2 \dot{x}+\gamma_5 \alpha^2 \dot{x} y+\gamma_6 \dot{y}+\gamma_5 \alpha^2 x \dot{y}+ \\ \gamma_7 y \dot{y}+\gamma_8 \alpha^2 x+\gamma_9 \cos \omega t=0 \end{cases}, \quad (19)$$

式中: $\gamma_1=\frac{L_0 i_0^2}{mh}, \gamma_2=\frac{L_0 i_0}{mh}, \gamma_3=\frac{k}{m}, \gamma_4=L_0,$

$$\gamma_5=\frac{L_0}{h}, \gamma_6=\frac{L_0 i_0}{h}, \gamma_7=\frac{2L_0 i_0}{h^2}, \gamma_8=R, \gamma_9=\mu_m.$$

将式(19)中的第2式子代入第1式得到:

$$\gamma_4 \alpha \dot{x}+\gamma_5 \alpha \dot{x} y+\gamma_6 \dot{y}+\gamma_5 \frac{1}{\gamma_2}(\ddot{y}-\gamma_1 y+\gamma_3 \dot{y}) \dot{y}+ \\ \gamma_7 y \dot{y}+\gamma_8 \frac{1}{\gamma_2}(\ddot{y}-\gamma_1 y+\gamma_3 \dot{y})+\gamma_9 \cos \omega t=0. \quad (20)$$

继续完善式(19),得:

$$\ddot{y}-\omega_0^2 y=-\left[\frac{\gamma_2 \gamma_4}{\gamma_8} \alpha \dot{x}+\frac{\gamma_2 \gamma_5}{\gamma_8} \alpha \dot{x} y+\right. \\ \left.\frac{\gamma_3 \gamma_8+\gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \omega \dot{y}+\frac{\gamma_5}{\gamma_8} \omega^3 \ddot{y} y+\left(\frac{\gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8}+\frac{\gamma_2 \gamma_7}{\gamma_8}\right) y y+\frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \dot{y}^2+\right.$$

$$\left.\frac{\gamma_2 \gamma_9}{\gamma_8} \cos \omega t\right]. \quad (21)$$

令 $\omega_0^2=\gamma_1$, 引入非小参数 ϵ , 对系统进行变换, 令 $\tau=\omega t+\theta$, 此时 $\cos (\tau-\theta)=\cos \tau \cos \theta+\sin \tau \sin \theta$, 令 $H=\frac{\gamma_2 \gamma_9}{\gamma_8} \cos \theta, K=\frac{\gamma_2 \gamma_9}{\gamma_8} \sin \theta$, 整理得:

$$\omega^2 \ddot{y}+\omega_0^2 y=-\epsilon\left[\frac{\gamma_2 \gamma_4}{\gamma_8} \alpha \dot{x}+\frac{\gamma_2 \gamma_5}{\gamma_8} \alpha \dot{x} y+\right. \\ \left.\frac{\gamma_3 \gamma_8+\gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \omega \dot{y}+\frac{\gamma_5}{\gamma_8} \omega^3 \ddot{y} y+\frac{\gamma_1 \gamma_5+\gamma_2 \gamma_7}{\gamma_8} \omega y \dot{y}+\right. \\ \left.\frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \omega^3 \dot{y}^2+H \cos \tau+K \sin \tau\right]. \quad (22)$$

$$\text{令 } \omega^2=\omega_0^2+\epsilon \omega_1+\epsilon^2 \omega_2+\cdots. \quad (23)$$

引入参数变换,此时小参数 α 用非小参数 ϵ 近似表示:

$$\alpha=\frac{\epsilon \omega_1}{\omega_0^2+\epsilon \omega_1}. \quad (24)$$

反解出非小参数 ϵ :

$$\epsilon=\frac{\alpha \omega_0^2}{(1-\alpha) \omega_1}. \quad (25)$$

将式(25)代入式(23)可得:

$$\omega^2=\frac{\omega_0^2}{1-\alpha}, \quad (26)$$

$$\text{或 } \omega=\omega_0\left(1+\frac{1}{2} \alpha\right), \omega^3=\omega_0^3 \frac{1+\alpha / 2}{1-\alpha}. \quad (27)$$

对 y 采用摄动法^[9]展开:

$$y=y_0+\alpha y_1+\alpha^2 y_2+\cdots. \quad (28)$$

利用上述论述,将式(22)化为:

$$(1-\alpha)\left(\ddot{y}_0+\alpha \ddot{y}_1+\alpha^2 \ddot{y}_2+\cdots\right)-(1-\alpha)^2\left(y_0+\right. \\ \left.\alpha y_1+\alpha^2 y_2+\cdots\right)=-\frac{\alpha}{\omega_1}\left[\frac{\gamma_2 \gamma_4}{\gamma_8}(1-\alpha) \alpha \dot{x}+\frac{\gamma_2 \gamma_5}{\gamma_8}\right. \\ \left.(1-\alpha) \alpha \dot{x}\left(y_0+\alpha y_1+\alpha^2 y_2+\cdots\right)+\frac{\gamma_3 \gamma_8+\gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \omega_0\right. \\ \left.(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{2} \alpha\right)\left(\dot{y}_0+\alpha \dot{y}_1+\alpha^2 \dot{y}_2+\cdots\right)+\frac{\omega_0^3}{2} \frac{\gamma_5}{\gamma_8}\right. \\ \left.(2+\alpha)\left(\ddot{y}_0+\alpha \ddot{y}_1+\alpha^2 \ddot{y}_2+\cdots\right)\left(\dot{y}_0+\alpha \dot{y}_1+\alpha^2 \dot{y}_2+\right.\right. \\ \left.\left.\cdots\right)+\left(\frac{\gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8}+\frac{\gamma_2 \gamma_7}{\gamma_8}\right) \omega_0(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{2} \alpha\right)\left(y_0+\alpha y_1+\right.\right. \\ \left.\left.\alpha^2 y_2+\cdots\right)\left(\dot{y}_0+\alpha \dot{y}_1+\alpha^2 \dot{y}_2+\cdots\right)+\frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \omega_0^2\left(\dot{y}_0+\right.\right. \\ \left.\left.\alpha \dot{y}_1+\alpha^2 \dot{y}_2+\cdots\right)^2+H \cos \tau+K \sin \tau\right]. \quad (29)$$

比较方程两边 α 的幂次得:

$$\alpha^0: \ddot{y}_0 - y_0 = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \alpha^1: \ddot{y}_1 - y_1 &= \ddot{y}_0 - 2y_0 - \frac{1}{\omega_1} \left[\omega_0 \left(\frac{\gamma_3 \gamma_8}{\gamma_8} + \frac{\gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \right) \right. \\ &\quad \dot{y}_0 + \omega_0^3 \frac{\gamma_5}{\gamma_8} \ddot{y}_0 \dot{y}_0 + \omega_0 \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8} \dot{y}_0 y_0 + \omega_0^2 \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \\ &\quad \dot{y}_0^2 + H \cos \tau + K \sin \tau \left. \right], \quad (31) \\ \alpha^2: \ddot{y}_2 - y_2 &= \ddot{y}_1 - 2y_1 + y_0 - \frac{1}{\omega_1} \left[\omega_0 \right. \\ &\quad \left(\frac{\gamma_3 \gamma_8 + \gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \right) \left(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} \dot{y}_0 \right) + \omega_0^3 \frac{\gamma_5}{\gamma_8} (\ddot{y}_0 \dot{y}_1 + \dot{y}_0 \ddot{y}_1) \\ &\quad + \omega_0^3 \frac{\gamma_5}{2 \gamma_8} \ddot{y}_0 \dot{y}_0 + \omega_0 \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8} (\dot{y}_0 y_1 + y_0 \dot{y}_1 + \\ &\quad \left. \frac{1}{2} y_0 \dot{y}_0) + \omega_0^2 \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \dot{y}_0 \dot{y}_1 + H \cos \tau + K \sin \tau \right]. \quad (32) \end{aligned}$$

式(30)的基解, 即式(22)的零次近似解:

$$y_0 = A e^{-\tau} + B e^{\tau}. \quad (33)$$

将基解式(33)代入式(31), 得到动力学模型的一次可求永年项的表达式。同理, 利用式(32)可得到方程(22)的二次可求永年项表达式。再根据永年项的定义, 即随时间增加趋于无穷的项^[10], 也就是在所得到的二次可求永年项表达式中含有 e^{τ} , $e^{2\tau}$, $e^{3\tau}$, 也就是说系统发生振幅无限的共振。若要使磁浮系统做周期平稳运动, 需要消除永年项。为此令所得式中的 e^{τ} , $e^{2\tau}$, $e^{3\tau}$ 项的系数为零。

$$\begin{aligned} e^{\tau}: & -\frac{\tau}{2} \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) - \\ & \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) - c_1 - \frac{1}{4} \\ & \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) + B - \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\gamma_3 \gamma_8 + \gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \left[\frac{\tau}{2} \right. \\ & \left. \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_3 \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + c_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) - \frac{1}{2} B \right] - \frac{\omega_0^3}{\omega_1} \frac{\gamma_5}{\gamma_8} \left[\frac{2 A B^2 \omega_0}{3 \omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \right. \\ & \left. \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5) - \frac{B}{\omega_1} K \sin \tau \right] - \frac{\omega_0}{\omega_1} \\ & \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8} \left[-\frac{A B^2 \omega_0}{3 \omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \right. \\ & \left. \gamma_1 \gamma_5) + \frac{B}{2 \omega_1} (H \sin \tau + K \cos \tau) - \frac{2}{\omega_1 \gamma_8} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A B^2 \gamma_3 \gamma_5 \omega_0^2 + \frac{B}{2 \omega_1} (H \cos \tau - K \sin \tau) \left. \right] - \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \\ & \left[-\frac{2 A B^2 \omega_0}{3 \omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5) + \frac{B}{2 \omega_1} \right. \\ & \left. (H \cos \tau - K \sin \tau) \right] = 0. \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{2\tau}: & -\frac{2 A B^2 \omega_0}{3 \omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \\ & \gamma_1 \gamma_5) + \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\gamma_3 \gamma_8 + \gamma_2 \gamma_6}{\gamma_8} \frac{2 A B^2 \omega_0}{3 \omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \\ & \gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5) - 2 B \frac{\omega_0^3}{\omega_1} \frac{\gamma_5}{\gamma_8} \left[\frac{\tau}{2} \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \right. \\ & \left. c_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) \right] - B^2 \frac{\omega_0^4}{\omega_1} \frac{\gamma_5}{2 \gamma_8} - \\ & 2 B \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8} \left[\frac{\tau}{2} \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} \right. \right. \\ & \left. \left. B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \right. \\ & \left. c_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) \right] - B^2 \frac{\omega_0}{\omega_1} \\ & \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{2 \gamma_8} - B \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \left[\frac{\tau}{2} \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} \right. \right. \\ & \left. \left. B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + c_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) \right] - \\ & B^2 \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{2 \gamma_8} - B \frac{\omega_0^2}{\omega_1} \frac{\gamma_3 \gamma_5}{\gamma_8} \left[\frac{\tau}{2} \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \right. \right. \\ & \left. \left. \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + \left(-B - \frac{1}{\omega_1} \gamma_3 B \omega_0 - \frac{1}{\omega_1 \gamma_8} \right. \right. \\ & \left. \left. B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0 \right) + c_1 + \frac{1}{4} \left(\frac{B \gamma_3 \omega_0}{\omega_1} + B + \frac{B \gamma_2 \gamma_6 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} \right) \right] = 0. \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{3\tau}: & \frac{2 B^3 \omega_0^4 \gamma_5}{\omega_1^2 \gamma_8^2} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5) \\ & + \frac{\omega_0}{\omega_1} \frac{\gamma_2 \gamma_7 - \gamma_1 \gamma_5}{\gamma_8} \frac{B^3 \omega_0}{\omega_1 \gamma_8} (\gamma_5 \omega_0^2 - \gamma_3 \gamma_5 \omega_0 + \gamma_2 \gamma_7 - \\ & \gamma_1 \gamma_5) = 0. \quad (36) \end{aligned}$$

3 数值模拟

运用四阶龙格库塔^[11]计算非线性微分方程, 需要把式(15)化为标准型, 令式(15)中的 $\Delta y = x_1$, $\Delta \dot{y} = x_2$, $i = x_3$, 得到 3 个一阶微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{\mu_0 S N^2}{4m(h-x_1)} x_3^2 - \frac{k}{m} x_2 - g \\ \dot{x}_3 = \frac{2(h-x_1)(u \cos \omega t - R x_3)}{\mu_0 S N^2} x_2 - \frac{x_2 x_3}{h-x_1} \end{cases} \quad (37)$$

在利用 Matlab 进行计算之前,需要为式(37)中的各个参数赋值,且确定式(37)的初始条件。

各参数的取值分别为: $R=1 \Omega$, $m=61\ 000 \text{ kg}$, $\mu_0=4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $S=0.021 \text{ m}^2$, $i_0=30 \text{ A}$, $N=356$, $k=8.46 \times 10^4 \text{ N} \cdot \text{s/m}$, $h=0.01 \text{ m}$, $\omega=100 \pi \text{ rad/s}$, $u=220 \text{ V}$ 。

设式(37)非线性微分方程组的初始条件分别为:

$$\begin{cases} \Delta y(0) = -0.01 \\ \Delta \dot{y}(0) = 0 \\ i(0) = 30 \end{cases} \quad (38)$$

通过四阶龙格库塔法计算并绘制出 50 s 内磁浮列车悬浮系统在空载、满载、过载不同载荷下的时间响应曲线以及相图,见图 3—8。

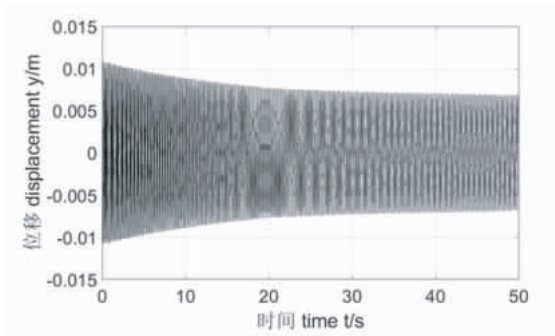


图 3 $m=60\ 000 \text{ kg}$ 时间响应曲线

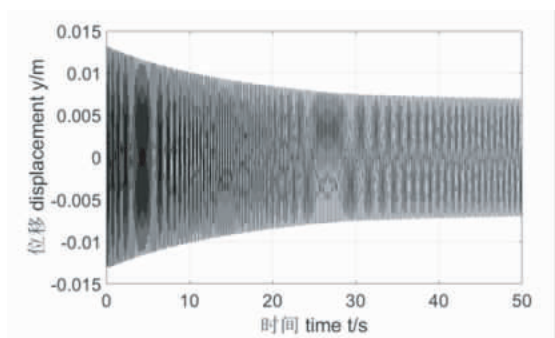


图 4 $m=69\ 000 \text{ kg}$ 时间响应曲线

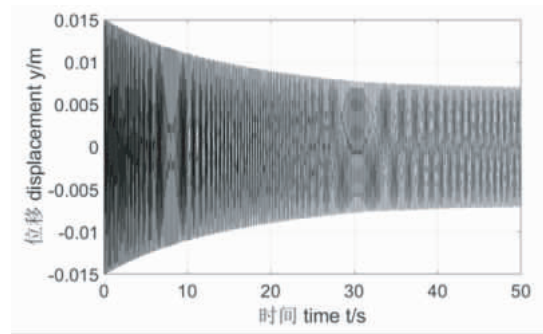


图 5 $m=70\ 800 \text{ kg}$ 时间响应曲线

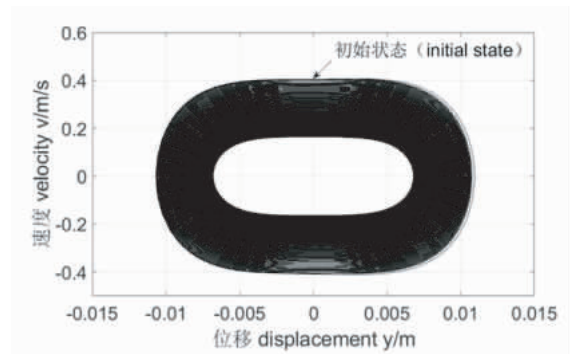


图 6 $m=60\ 000 \text{ kg}$ 相图

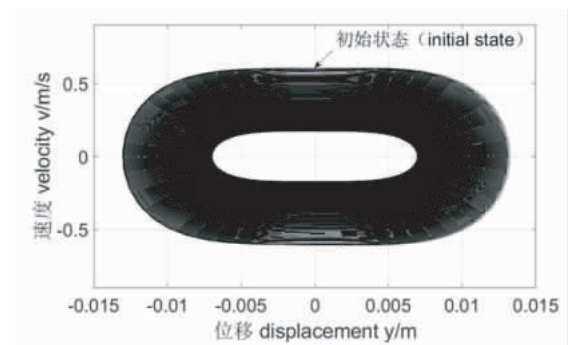


图 7 $m=69\ 000 \text{ kg}$ 相图

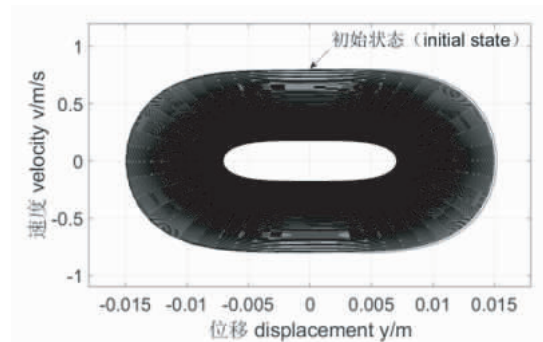


图 8 $m=70\ 800 \text{ kg}$ 相图

从图 3 到图 5 可以看出,随着磁浮列车质量的增加,列车初始位移会增大,但随着时间的

推移,列车都会趋于稳定。从图6到图8的相图可以看出,随着磁浮列车质量的增加,列车初始位移会增大,列车的垂向振动速度在减小,这表示列车会趋于稳定。

4 结论

(1)选取间隙和电流为广义坐标,利用拉格朗日—麦克斯韦方程建立磁浮列车悬浮系统的运动模型。该模型属于三阶非线性微分方程。

(2)改变MLP法的基解形式,是考虑到微分方程的形式同传统的振动微分方程不同,其基解的表达式为指数形式,不同于正刚度的三角函数形式,最终得到三个不同指数幂的表达式,这也不同于正刚度的三角函数形式,三角函数形式只能有两个表达式,指数形式涉及到的不定参数过多而无法进行求解。

(3)在空载、满载、过载情况下,模拟时间为50 s时的悬浮系统振动时间响应曲线,由相图可知,列车质量增加,列车初始位移会增大,但列车启动后经过一定的时间,系统振动趋于稳定。

参考文献:

- [1] 李莉,孟光. 电磁型磁悬浮列车动力学研究综述[J]. 铁道学报,2003,25(4):110-114.
- [2] 邱家俊. 机电分析动力学[M]. 北京:科学出版社,1992.
- [3] YANG Z A, LI W L, QIU J J, et al. Lagrange-Maxwell equation and magnetic saturation parametric resonance of generator set[J]. Applied Mathematics & Mechanics,2007,28(11):1545-1553.
- [4] 杨志安. 基于磁链和电压为广义坐标机电耦合系统动力学方程[J]. 工程力学,2012,29(5):189-192.
- [5] 席晓燕,杨志安,李高峰,等. 受简谐激励载流导线的强非线性主共振[J]. 唐山学院学报,2013,26(3):5-7.
- [6] WU L, SU X, SHI P. Fuzzy control of nonlinear electromagnetic suspension systems[J]. Mechatronics,2014,24(4):328-335.
- [7] 施晓红,龙志强. 磁悬浮车轨耦合控制系统的非线性振动特性分析[J]. 铁道学报,2009,31(4):38-42.
- [8] 杨霞,高燕,杨波,等. 基于状态空间控制方法的磁悬浮系统稳定性研究[J]. 组合机床与自动化加工技术,2008(5):40-44.
- [9] 陈怀海,贺旭东. 振动及其控制[M]. 北京:国防工业出版社,2015.
- [10] 谢元喜. 一类强非线性问题的MLP解法[J]. 湖南人文科技学院学报,2004(2):5-6.
- [11] 李小保,左鹏,居荣誉. 基于MATLAB的机械振动问题的研究[J]. 科技创新与应用,2016(17):116-116.

(责任编辑:夏玉玲)