

考虑塑性效应的岩石蠕变 Maxwell 模型的改进

尹前锋, 鲁海峰, 赵逢春

(安徽理工大学 地球与环境学院, 安徽 淮南 232001)

摘要: 岩石蠕变是工程中常见的问题, 蠕变岩体往往具有粘性、弹性、塑性三大基本特性, 文章对现有岩石蠕变模式进行了改进, 即根据前人的实验结果, 在 Maxwell 模型基础上对虎克体、牛顿体、圣文南体三种基本元件进行合理重组, 并运用基本微分方程演绎新模型下蠕变本构方程。将得到的方程拟合曲线与前人试验数据进行比较, 结果表明改进的模型能够反映软弱岩石的粘弹特性。

关键词: 岩石蠕变; Maxwell 模型; 本构方程

中图分类号: TD313⁺.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-349X(2017)03-0055-03

DOI: 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2017.03.012

A Plasticity-based Improved Maxwell Model of Rock Creep

YIN Qian-feng, LU Hai-feng, ZHAO Feng-chun

(College of Earth and Environment, Anhui University of Science and Technology, Huainan 232001, China)

Abstract: Rock creep, with the three basic characteristics of being viscous, elastic and plastic, is a common problem in engineering application. On the basis of the previous experimental results and Maxwell Model, the authors have improved on the existing rock creep model by restructuring Hooke, Newton and Saint Venant bodies and deduced a new model of creep constitutive equation with the basic differential equations. The fitting curve of the obtained equation has been compared with the previous experimental data and the results show that the improved model can reflect the viscoelastic characteristics of weak rock.

Key Words: rock creep; Maxwell Model; constitutive equation

0 引言

岩石的蠕变特性是岩石材料的重要力学性质, 许多工程问题都与岩石的蠕变密切相关。对岩石蠕变性质的研究可追溯到 20 世纪 30 年代。1939 年, Griggs 在对砂岩、泥板岩和粉砂岩等进行大量蠕变试验时发现, 当荷载达到破

坏荷载 12.5%~80% 时就会发生蠕变^[1-2]。如今, 国内外学者对岩石的蠕变特性和蠕变模型进行了大量的研究, 已提出的蠕变模型有数百种, 比较常用的有鲍埃丁模型、Burgers 模型、Bingham 模型等, 各种模型具有各自特点, 适用于不同的情况, 但也有一定的缺陷和局限性。

基金项目: 安徽省自然科学基金项目(1508085QE89); 安徽省高校优秀青年人才支持计划项目(gxyq2017004); 安徽省大学生创新创业训练计划项目(201510361117)

作者简介: 尹前锋(1995-), 男, 安徽宿州人, 本科生, 主要从事地质工程研究。

Maxwell 模型作为典型的粘弹性模型,能够较好地描述部分岩石蠕变特性。但是,在工程建设中遇到的大多数岩石特别是软岩中存在着普遍且明显的塑性等非线性蠕变特征,传统 Maxwell 模型显然不能有效反映这一特性,所以迫切需要对原始粘弹塑性元件进行重组,构造出改进模型,以更好地反映岩体的蠕变特性。

1 蠕变基本理论与基本模型

岩石蠕变主要包括两种:一种是稳定蠕变,指当岩石承受恒定载荷时,蠕变越明显,蠕变速率越快,但随着时间的推移,蠕变变形率会下降,最终趋于稳定值(即长期强度);另一种则是非稳定蠕变,也叫非衰减蠕变,也就是指当岩石承受恒定载荷时,蠕变变形不会趋于稳定值,而是继续发展直至破坏。岩石蠕变过程可以分为三个阶段:初始阶段、匀速阶段、加速阶段^[3],典型的岩石蠕变曲线如图 1 所示。

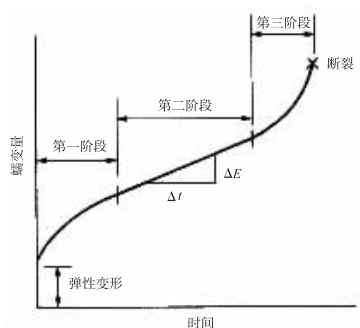


图 1 典型的岩石蠕变曲线

传统的蠕变模型通常有三种基本元件,即弹性元件、塑性元件和粘性元件,弹性体用字母 H 代表;塑性体则可用一个摩擦片表示,用字母 S 代表;粘性体可用一个活塞表示,用字母 N 代表。三种元件模型示意图如图 2 所示。

比较常见的基本模型有^[4]:

(I) Maxwell 模型由弹性元件与粘性元件串联组成,其蠕变本构方程为

$$\epsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right), \quad (1)$$

式中, σ_0 为应力; $\epsilon(t)$ 为应变函数; E 为弹性模量; η 为粘滞系数 ($\text{Pa} \cdot \text{s}$); t 为时间 (s)。

(II) Kelvin 模型由弹性元件与粘性元件并联组成,其蠕变本构方程为

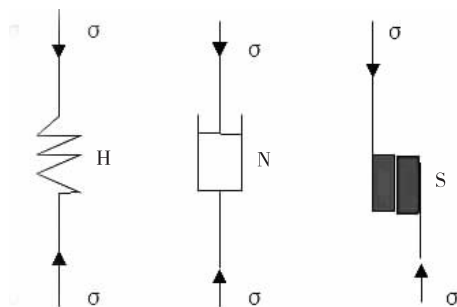


图 2 三种元件模型示意图

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_1}{\eta_1} t}). \quad (2)$$

2 Maxwell 模型改进

2.1 改进思路

岩石一般具有瞬弹性、瞬塑性、粘弹性和粘塑性共存特性,而典型的 Maxwell 蠕变模型只能描述材料的粘弹性规律,因此其适用范围有局限性。要使其能够较准确地反映岩石的塑性应变特性应在原模型中联入塑性元件。在对前人实验结果^[5]进行分析后可以得出下列模型,如图 3 所示。

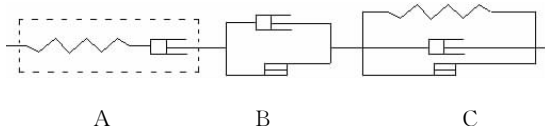


图 3 模型示意图

该模型是在原 Maxwell 模型(图 3A 虚线部分)的基础上,将一个牛顿体(粘性元件)与圣文南体(塑性元件)并联(图 3B 部分)以模拟粘塑性特征,将一圣文南体与 Kelvin 模型并联(图 3C 部分)可有效模拟岩石在应力作用下因微裂隙发育、矿物排列结构变化等消耗变形所导致的弹性滞后现象。改进后的模型即是将三部分串联起来。

该模型总应变 ϵ 由 A, B, C 三部分应变总和决定,即

$$\epsilon = \epsilon_A + \epsilon_B + \epsilon_C, \quad (3)$$

式中 $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ 分别为图 3 所示模型中 A, B, C 部分应变。

2.2 本构方程的推导

2.2.1 一维状态下本构方程的推导

当 $\sigma < \sigma_s$ 时,该模型将退回到传统的 Max-

wall 模型。以下将讨论当 $\sigma > \sigma_s$ 时,改进的 Maxwell 模型本构方程的推导。

(I) A 部分应变。A 部分即原 Maxwell 模型,其蠕变本构方程如式(1)所示。

(II) B 部分应变为

$$\epsilon_B = \frac{\sigma_0 - \sigma_{S1}}{\eta_2} t, \quad (4)$$

式中, σ_{S1} 为 B 模块圣文南体的极限强度。

(III) C 部分应变为

$$\epsilon_C = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3, \quad (5)$$

式中, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 分别为图 3 所示模型中 C 部分的虎克体、牛顿体、圣文南体应变。

C 部分总应力为

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad (6)$$

式中, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为图 3 所示模型中 C 部分的虎克体、牛顿体、圣文南体应力。

而 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_C, \quad (7)$$

$$\sigma_2 = \eta_3 \frac{d\epsilon_C}{dt}, \quad (8)$$

$$\sigma_3 = \sigma_{S2}, \quad (9)$$

式中, σ_{S2} 为 C 模块圣文南体的极限强度,与 σ_{S1} 值相近。

将式(7)(8)(9)代入式(6)得

$$\sigma = E_1 \epsilon_C + \eta_3 \frac{d\epsilon_C}{dt} + \sigma_{S2}. \quad (10)$$

在蠕变情况下 $\sigma = \sigma_0$, 解上式微分方程得 C 部分蠕变方程:

$$\epsilon_C = \frac{\sigma_0 - \sigma_{S2}}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_3} t}). \quad (11)$$

联立上述各式得改进模型一维状态下的蠕变本构方程为

$$\epsilon^1(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_1} \right) + \frac{\sigma_0 - \sigma_{S1}}{\eta_2} t + \frac{\sigma_0 - \sigma_{S2}}{E_2} (1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_3} t}), \quad (12)$$

式中, $\epsilon^1(t)$ 为一维状态下的应变函数。

2.2.2 三维状态下本构方程的推导

在三维应力状态下,其内部的应力张量可分解为球应力张量和偏应力张量^[6]。

设岩石剪切模量为 G , 体积模量为 K , 则

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad (13)$$

式中, E 和 ν 分别表示岩石的弹性模量和泊松比。

在三轴应力状态下,结合上述各式便可得到岩石三维状态下的蠕变方程。

(I) $\sigma < \sigma_{S1}$ 时,

$$e_{ij}(t) = (S_{ij})_0 \left(\frac{1}{2G_1} + \frac{t}{\eta_1} \right), \quad (14)$$

式中, $e_{ij}(t)$ 为偏应变关于时间的函数, $(S_{ij})_0$ 为最大偏应力。

(II) 当 $\sigma > \sigma_{S1}$ 时,

$$e_{ij}(t) = (S_{ij})_0 \left(\frac{1}{2G_1} + \frac{t}{\eta_1} \right) + \frac{(S_{ij})_0 - \sigma_{S1}}{\eta_2} t + \frac{(S_{ij})_0 - \sigma_{S2}}{2G_2} (1 - e^{-\frac{E_2}{\eta_3} t}), \quad (15)$$

式中, $(S_{ij})_0$ 为实验时的恒定偏应力; G_1, G_2 分别为模型的剪切模量; η_1 为图 3A 部分 Maxwell 模型中牛顿粘性系数; η_2 为图 3B 部分牛顿粘性系数; η_3 为图 3C 部分牛顿粘性系数。岩石的偏应力长期强度可通过常规实验确定。

3 对改进的 Maxwell 模型的验证

为验证本次提出的蠕变模型的正确性,运用文献[5]中的蠕变实验数据进行验证。文献[5]中的实验是在不同应力状态和应力水平下进行的,即每个试件所受的等效正应力 σ_i 各不相同,本文采用泥岩在 17 MPa 正应力作用下的蠕变实验数据进行验证。将蠕变时间 t 带入到式(14)或(15)中,得出蠕变应变值,再将此计算值与实验取得的应变值进行拟合,结果如图 4 所示,二者拟合程度较好,可见本文提出的改进的 Maxwell 蠕变模型能够模拟岩石材料的粘弹塑性特性。

4 结论

(1)改进的 Maxwell 蠕变模型能够模拟岩石材料的粘弹塑性特性,解决了典型 Maxwell 蠕变模型只能描述岩石材料粘弹特性的缺陷。因改进后的模型其蠕变本构方程未引入新的参数,可以简便有效地对岩石蠕变行为进行较为准确地描述。

(下转第 66 页)

- based copy-move image forgery detection [J]. International Journal of Digital Content Technology and Its Applications, 2011, 5(1): 251 - 258.
- [5] Zhang T, Wang R D. Copy-move forgery detection based on SVD in digital image [C]. IEEE International Congress on Image and Signal Processing, 2009: 596 - 601.
- [6] Li G, Wu Q, Tu D, et al. A sorted neighborhood approach for detecting duplicated regions in image forgeries based on DWT and SVD [C]. IEEE International Conference on Multimedia and Expo, 2007: 1750 - 1753.
- [7] 王正庚. 数字图像复制粘贴型篡改盲检测 [D]. 成都: 四川大学, 2012.
- [8] 骆伟祺, 黄继武, 丘国平. 鲁棒的区域复制图像篡改检测技术 [J]. 计算机学报, 2007, 30(11): 1998 - 2007.
- [9] 晏力. 基于奇异值分解的 DCT 域数字图像水印算法 [J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2010, 27(3): 262 - 266.
- [10] 杨卫民, 孟令梅, 蔡键. 奇异值分解的可自恢复的图像篡改认证方案 [J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(13): 216 - 218.
- [11] 吴琼, 李国辉, 孙韶杰, 等. 基于小波和奇异值分解的图像复制伪造区域检测 [J]. 小型微型计算机系统 [J]. 2008, 29(4): 730 - 733.
- [12] Luo W Q, Huang J W, Qiu G P. JPEG error analysis and its application to digital image forensics [J]. IEEE Trans Inf Forensics Security, 2010, 5(3): 480 - 491.

(责任编辑: 李秀荣)

(上接第 57 页)

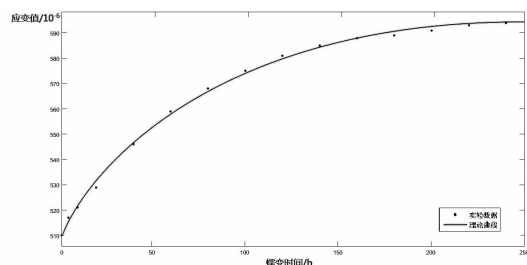


图 4 泥岩室内三轴蠕变实验数据
与理论值拟合曲线

(2) 运用前人对软弱岩石的实验数据验证了本文提出的改进的蠕变模型, 结果显示, 实验值与计算值拟合程度较好, 表明改进的蠕变模型是正确的, 适应于包括软粘土板岩、粘土岩、泥岩等在内的软弱岩石的前、中期蠕变阶段的分析, 可为今后在工程中的应用提供较为准确的理论依据。

参考文献:

- [1] 付腾飞, 付宝杰. 非线性流变模型的研究与应用 [J]. 煤炭技术, 2016(3): 87 - 89.
- [2] 张忠亭, 王宏, 陶振宇. 岩石蠕变特性研究进展概况 [J]. 长江科学院院报, 1996, 16(S1): 2 - 3.
- [3] 孟庆立. 岩体蠕变特征及其对地表下沉的影响 [D]. 保定: 河北大学, 2012.
- [4] 陆家佑. 岩体力学及其工程应用 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011: 48 - 52.
- [5] 翟英达, 石兴, 刘吉新. 泥岩蠕变性质的研究 [J]. 山西矿业学院学报, 1995(3): 279 - 285.
- [6] 杨欣. 充填体蠕变本构模型及其工程应用 [D]. 赣州: 江西理工大学, 2011.

(责任编辑: 夏玉玲)