任意转换下带有未知迟滞的随机非线性系统自适应跟踪控制方案

李雷雷，刘西奎

（山东科技大学 数学与系统科学学院，山东 青岛 266590）

摘要： 主要研究了任意转换下带有未知迟滞的随机非线性系统的自适应跟踪控制问题。采用变量分离方法对状态变量进行分解，使其在任意转换之下逼近于一个光滑函数。通过把径向基函数神经网络普遍近似性能与自适应反步法相结合，构造出一个在任意转换之下的自适应神经控制算法。所设计的控制器保证了所有闭路系统信号半全局一致有界，并且，跟踪误差最终收敛到一个原点小邻域内，提出的方案更好地保证了在任意转换之下系统的稳定性。

关键词： 自适应跟踪控制；迟滞系统；随机非线性系统；转换系统

中图分类号： O29；TP273⁺.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 1672－349X(2017)03－0001－08

DOI： 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2017.03.001

Adaptive Tracking Control of Uncertain Switched Stochastic Nonlinear Systems with Unknown Hysteresis

LI Lei-lei, LIU Xi-kui

(College of Mathematics and System Sciences, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: This paper is concerned with the problem of adaptive tracking control of unceitain switched stochastic nonlinear systems with unknown direction hysteresis. In this paper, the method of separation of variables is employed to decompose the state variables, and thus a smooth function is approximated to under arbitrary transformation. An adaptive neural control algorithm under arbitrary transformation is established through the combination of the neural network universal approximation performance of the radial basis function (RBF) with adaptive inverse footwork. The designed controller ensures the uniform boundedness of the semi-global of all closed circuit systems, and the tracking error converge is reduced to a small neighborhood of the original point. In short, the solutions put forward in the paper better guarantee the system stability under arbitrary transformation.

Key Words: adaptive tracking control; hysteresis system; stochastic nonlinear system; switched systems

---

基金项目： 国家自然科学基金(61402265)；山东科技大学研究生创新基金(SDKDYC170344)；山东省泰山学者研究基金项目(2015TDJH105)；青岛市博士后应用研究项目(2016118)

作者简介： 李雷雷(1992－)，男，山东德州人，硕士研究生，主要从事自适应模糊控制理论和随机非线性系统理论研究。

0 引言

近年来,基于反步法自适应控制已经成为了非线性系统最常用的设计方法之一。随机干扰在实际的系统中会经常出现,导致系统不稳定,从而造成偏大的误差。因此,随机非线性系统中状态分析系统和控制系统的设计就成为了一个值得研究的课题。而且,基于反步法控制设计的许多确定的非线性严格反馈系统的研究成果已经成功地推广到了随机非线性系统[1-4]。在文献[5]中,对随机非线性系统提出了一个基于反步法的设计方案,保证了概率全局渐近稳定。在这篇文章的基础上,文献[6-7]对随机非线性系统做了进一步的推广。在文献[8-12]中,对于随机非线性严格反馈系统,都引入了一个李雅普诺夫函数,并分别给出了反步法设计方案。然而,这些控制方案要求随机非线性系统都是已知的,或者相对于已知非线性函数的未知参数都是线性的,这些在实际应用中很难满足。

在文献[13-15]中,提出了基于近似的自适应模糊控制方案。在文献[16]中,提出了一个自适应神经网络控制方案来解决带有未知协方差噪声的一系列不定严格反馈随机非线性系统。在文献[17]中,基于未知虚拟控制增益函数,对于带有不定严格反馈的随机非线性系统,提出了一个自适应模糊控制方案。在文献[18-19]中,针对随机非线性严格反馈迟滞系统,多个基于近似自适应神经控制方案被提出,最终很好地解决了系统所存在的迟滞问题。

众所周知,迟滞现象在许多的物理系统和设备中广泛存在,比如在生物光学系统、电子继电器电路和机械转动装置中。迟滞现象的存在很大程度上影响了系统设备的运行,甚至会导致控制系统的不稳定[20]。因此,带有未知迟滞非线性控制问题的解决仍然是一个非常值得关注的课题。在文献[20]中,提出了一个参数化迟滞模型,并对未知方向迟滞引入迟滞逆的概念,设计了一个自适应控制器。在文献[21]中,对于带有未知类反斜线迟滞的非线性系统,自适应模糊控制和自适应反步控制被引入,同时,为了能够适应更一般的情形,很多系统设备必须在严格转换系统中才能达到目的。

基于此,笔者针对带有未知类反斜线迟滞的随机非线性系统,提出了一个任意转换之下的自适应神经跟踪控制方案。

1 问题的公式化

首先考虑下面这个随机系统

$$\mathrm{d}x = f(x,t)\mathrm{d}t + h(x,t)\mathrm{d}w,\ \forall x \in R^n, \quad (1)$$

其中 w 是定义在全概率空间$(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$中的一个 r 维独立标准布朗运动,Ω 是一个样本空间,F 是一个 σ-域,P 是一个概率测度。$x \in R^n$ 是系统状态,$f: R^n \to R^n$ 和 $h: R^n \to R^{n\times r}$ 是局部李普希茨函数,并且满足 $f(0,t)=0, h(0,t)=0$。

定义1[9]:对于任意的 $V(x,t) \in C^{2,1}$ 和随机系统(1),定义微分算子

$$LV = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}f + \frac{1}{2}Tr\left\{h^T \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}h\right\}, \quad (2)$$

其中 $Tr(A)$ 是 A 的迹。

定义2[21]:如果对于全集 $\Omega \in R^n$ 和任意初始状态 $x_0 = x(t_0)$,存在常数 $\varepsilon > 0$ 和一个时间常数 $T = T(\varepsilon, x_0)$,对所有的 $t > t_0 + T$,使得 $E(|x(t)|^p) < \varepsilon$,则称随机系统(1)的轨迹 $\{x(t), t \geqslant 0\}$ 半全局一致有界,其中 $E(|x(t)|^p)$ 表示 $|x(t)|^p$ 的期望。

引理1[21] 假设存在函数 $V(x,t): R^n \times R^+ \to R^+$,常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$,K_∞ 类函数 $\bar{\alpha}_1$ 和 $\bar{\alpha}_2$,对所有的 $x \in R^n$ 和 $t > t_0$,有

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_1(|x|) \leqslant V(x,t) \leqslant \bar{\alpha}_2(|x|) \\ LV(x,t) \leqslant -c_1 V(x,t) + c_2 \end{cases},$$

则对于任一 $x_0 \in R^n$,满足

$$E[V(x,t)] \leqslant V(x_0)e^{-c_1 t} + \frac{c_2}{c_1}, \forall t > t_0。$$

在任意转换下,带有类反斜线迟滞制动器的非严格反馈随机非线性系统如下:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i = (f_{i,k}(x) + g_{i,k}(\bar{x}_i)x_{i+1})\mathrm{d}t + \\ h_{i,k}^T(x)\mathrm{d}w, 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ \mathrm{d}x_n = (f_{n,k}(x) + g_{n,k}(\bar{x}_n)u(v))\mathrm{d}t +, \\ h_{n,k}^T(x)\mathrm{d}w \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3)$$

其中 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^{\mathrm{T}} \in R^n$ 是系统状态向

量，$\bar{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}\in R^i$，$y\in R$ 是系统输出。$f_{ik}(\cdot):R^n\to R$，$g_{ik}(\cdot):R^i\to R$，$h_{ik}(\cdot):R^n\to R^r$，$i=1,2,\cdots,n$ 是未知光滑非线性函数，并且 $f_{i,k}(0)=0$，$h_{i,k}(0)=0$。$u\in R$ 是系统输入和未知类反斜线迟滞的输出，并且满足

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\alpha\left|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right|(cv-u)+B\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\tag{4}$$

其中 v 是未知类反斜线迟滞的输入，α，c 和 B 是未知常数，$c>0$ 是斜率，并且满足 $c>B$。

为了方便起见，引入

$$u(t)=cv(t)+\mathrm{d}(v),\tag{5}$$

$$\mathrm{d}(v)=[u_0-cv_0]\mathrm{e}^{-\alpha(v-v_0)\mathrm{sgn}\dot{v}}+\mathrm{e}^{-\alpha v\mathrm{sgn}\dot{v}}\int_{v_0}^{v}[B-c]\mathrm{e}^{\alpha\zeta(\mathrm{sgn}\dot{v})}\mathrm{d}\zeta,\tag{6}$$

其中 u_0 和 v_0 分别表示 u 和 v 的初始值。$\mathrm{d}(v)$ 有界，即

$$|\mathrm{d}(v)|\leqslant D^*,\tag{7}$$

其中未知常数 D^* 是 $\mathrm{d}(v)$ 的界[22-23]。

把式(5)代入式(3)得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_i=(f_{i,k}(x)+g_{i,k}(\bar{x}_i)x_{i+1})\mathrm{d}t+\\ h_{i,k}^T(x)\mathrm{d}w,1\leqslant i\leqslant n-1\\ \mathrm{d}x_n=(f_{n,k}(x)+g_{n,k}(\bar{x}_n)cv+\\ g_{n,k}(\bar{x}_n)\mathrm{d}(v))\mathrm{d}t+h_{n,k}^T(x)\mathrm{d}w\\ y=x_1\end{cases}。\tag{8}$$

为了能够完成控制设计，作出如下假设。

假设 1　$g_{i,k}(\bar{x}_i)$ 的符号是已知的，并且存在常数 $b_M\geqslant b_m>0$，对任意 $1\leqslant i\leqslant n$，满足

$$b_m\leqslant|g_{i,k}(\bar{x}_i)|\leqslant b_M<\infty,\forall\bar{x}_i\in R^i。\tag{9}$$

假设 2　期望轨迹 $y_{d,k}(t)$ 和它的 n 阶导数 $y_{d,k}^{(n)}(t)$ 是连续有界的。另外，假设存在一个正常数 d^*，使得 $|y_{d,k}(t)|\leqslant d^*$。

假设 3　对于系统(8)中的函数 $f_{i,k}(x)$，存在严格递增光滑函数 $\phi_{i,k}(\cdot):R^+\to R^+$ 使得

$|f_{i,k}(x)|\leqslant\phi_{i,k}(\|x\|)$，$\phi_{i,k}(0)=0$，$i=1,2,\cdots,n$

注 1：由 $\phi_{i,k}(\cdot)$ 的递增性及 $a_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$，得 $\phi_{i,k}(\sum_{k=1}^{n}a_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\phi_{i,k}(na_k)$。又 $\phi_{i,k}(s)$ 是一个光滑函数，并且 $\phi_{i,k}(0)=0$，则存在一个光滑函数 $q_{i,k}(s)$，使得 $\phi_{i,k}(s)=sq_{i,k}(s)$，从而

$$\phi_{i,k}(\sum_{k=1}^{n}a_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}na_kq_{i,k}(na_k)。\tag{10}$$

假设 4　存在严格递增光滑函数 $\rho_{i,k}(\cdot)$：$R^+\to R^+$，$\rho_{i,k}(0)=0$，$i=1,2,\cdots n$，使得

$\|h_{i,k}(x)\|\leqslant\rho_{i,k}(\|x\|)$。

显然，在注 1 的条件下，存在一个光滑函数 $\eta_{i,k}(\cdot)$，使得

$$\rho_{i,k}(\sum_{k=1}^{n}b_k)\leqslant\sum_{k=1}^{n}nb_k\eta_{i,k}(nb_k),b_k\geqslant 0\tag{11}$$

在反步法控制设计过程中，将用径向基函数神经网络 $f_m(Z)$ 近似任意连续函数 $f(Z):R^n\to R$。这种径向基神经网络函数定义如下：

$$f_m(Z)=W^{\mathrm{T}}S(Z),\tag{12}$$

其中 $Z\in\Omega_Z\subset R^q$ 是状态输入矢量，q 是神经网络输入维度，权向量 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_l]^{\mathrm{T}}\in R^l$，$l>1$ 是神经网络节点数，$S(Z)=[s_1(Z),s_2(Z),\cdots,s_l(Z)]^{\mathrm{T}}$ 表示基函数向量，$s_i(Z)$ 常用高斯函数形式，即

$$s_i(Z)=\exp\left[-\frac{(Z-\mu_i)^{\mathrm{T}}(Z-\mu_i)}{\eta^2}\right],\tag{13}$$

其中 $\mu_i=[\mu_{i1},\mu_{i2},\cdots,\mu_{iq}]^{\mathrm{T}}(i=1,\cdots,l)$ 是邻域的中心，η 是高斯函数的广度。文献[26]中已经证明了对于很大的 l，任意的精度 $\varepsilon>0$，径向基神经网络函数(12)能够近似紧集 $\Omega_Z\subset R^q$ 上的任意连续函数

$$f(Z)=W^{*\mathrm{T}}S(Z)+\delta(Z),\forall z\in\Omega_Z\in R^q,\tag{14}$$

其中 W^* 是理想恒定权向量，且 $W^*:=\mathrm{argmin}_{W\in\bar{R}_l{}'}\{|f(Z)-W^{\mathrm{T}}S(Z)|\}$，$\delta(Z)$ 表示近似误差并且满足 $|\delta(Z)|\leqslant\varepsilon$。

引理 2[24]　考虑函数(12)和(13)，令 ρ：$1/2\min_{i\neq j}\|\mu_i-\mu_j\|$，则

$$\|S(Z)\|=\sum_{k=0}^{\infty}3q(k+2)^{q-1}\mathrm{e}^{-2\rho^2k^2/\eta^2}:=s,\tag{15}$$

其中常数 s 是一个独立于变量 Z 和 l 的有限值，表示神经网络权值 $W=[w_1,w_2,\cdots,w_l]^{\mathrm{T}}$ 的维度。

引理 3[8]（杨氏不等式）　对 $\forall(x,y)\in R^2$，有

$$xy \leqslant \frac{\varepsilon^p}{p} \mid x \mid^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} \mid y \mid^q,$$

其中 $\varepsilon > 0, p > 1, q > 1$,并且$(p-1)(q-1)=1$。

引理 4[25] 对 $\forall \eta \in R^2, \vartheta > 0$,有下列不等式成立

$$0 \leqslant \mid \eta \mid - \eta \tanh\left(\frac{\eta}{\vartheta}\right) \leqslant \delta\vartheta, \delta = 0.2785。\quad(16)$$

引理 5[21] 由坐标变换 $z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$,有

$$\| x \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid \varphi_i(z_i, \hat{\theta}_i) + d^*,$$

其中 $\varphi_i(z_i,\hat{\theta}_i) = (k_i + 7/4) + 1/(2a_i^2) z_i^2 \hat{\theta}_i s^2$, $i = 1,2,\cdots,n-1, \varphi_n = 1$。

2 主要结果和自适应控制设计

本节中基于反步法和径向基神经网络函数近似性能,对系统(8)给出一个自适应神经跟踪控制方案。反步法需要 n 个步骤,而且,在设计过程中,将基于一个适当的李雅普诺夫函数和相应子系统引入一个虚拟控制信号 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n-1)$。在每一步中,都会用到坐标变换

$$z_1 = x_1 - y_d, z_i = x_i - \alpha_{i-1}, i = 2,\cdots,n, \quad(17)$$

其中 α_{i-1} 是中间控制函数。

第 1 步:根据坐标变换(17),有

$$\mathrm{d}z_1 = (g_{1,k}x_2 + f_{1,k} - \dot{y}_d)\mathrm{d}t + h_{1,k}^T \mathrm{d}w。\quad(18)$$

考虑下面的李雅普诺夫函数

$$V_1 = \frac{1}{4} z_1^4 + \frac{b_m}{2\lambda_1} \tilde{\theta}_1^2, \quad(19)$$

其中 $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$ 是参数误差,λ_1 是一个正的设计常数。

由式(2)和式(19)得

$$LV_1 = z_1^3(g_{1,k}x_2 + f_{1,k} - \dot{y}_d) + \frac{3}{2} z_1^2 h_{1,k}^T h_{1,k} - \frac{b_m}{\lambda_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1。\quad(20)$$

由假设 3,引理 5,不等式(10)和杨氏不等式,可以推出

$$z_1^3 f_{1,k}(x) \leqslant \mid z_1 \mid^3 \phi_{1,k}(\| x \|) \leqslant \mid z_1 \mid^3 \phi_{1,k}\left(\sum_{l=1}^{n} \mid z_l \mid \varphi_l(z_l,\hat{\theta}_l) + d^*\right) \leqslant \sum_{l=1}^{n} \mid z_i \mid^3 \phi_{1,k}((n+1) \mid z_l \mid \varphi_l(z_l,\hat{\theta}_l) + \mid z_i^3 \mid \phi_{1,k}((n+1)d^*) \leqslant \frac{3}{4} n z_1^4 + \sum_{l=1}^{n} z_l^4 \bar{\phi}_{1,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l) + \mid z_i^3 \mid \phi_{1,k}((n+1)d^*), \quad(21)$$

上式中,$\bar{\phi}_{1,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l) = 1/4(n+1)^4 \varphi_l^4(z_l,\hat{\theta}_l) q_1^4((n+1) \mid z_l \mid \varphi_l(z_l,\hat{\theta}_l))$。

另外,对不等式(21)右边最后一项应用引理 4,可以得到

$$z_i^3 \phi_{1,k}((n+1)d^*) - z_i^3 \phi_{1,k}((n+1)d^*) \times \tanh\left(\frac{z_i^3 \phi_{1,k}((n+1)d^*)}{\vartheta_1}\right) \leqslant \delta\vartheta。\quad(22)$$

下面,构造虚拟控制信号:

$$\alpha_1(Z_1) = -\left(k_1 + \frac{3}{4}\right) z_1 - \frac{z_1^3}{2a_1^2} \hat{\theta}_1 S_{1,k}^T(Z_1) S_{1,k}(Z_1), \quad(23)$$

其中 $\hat{\theta}_i$ 是未知常数 θ_i 的估计值。自适应律为

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \frac{\lambda_1}{2a_i^2} z_1^6 S_{1,k}^T(Z_1) S_{1,k}(Z_1) - \gamma_1 \hat{\theta}_1。\quad(24)$$

由引理 5 得

$$\| x \| \leqslant \mid z_1 \mid \varphi_1(z_1,\hat{\theta}_1) + d^*。\quad(25)$$

又由假设 4,引理 5 和杨氏不等式得

$$\frac{3}{2} z_1^2 h_{1,k}^T h_{1,k} \leqslant \frac{3}{2} z_1^2 \rho_1^2(\| x \|) \leqslant \frac{9}{8}(n+1)^2 n z_1^4 + \sum_{l=1}^{n} z_l^4 \times \bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l) + \frac{9}{8}(n+1)^2 z_1^4 \frac{1}{l_{11}^2} \rho_1^4((n+1)d^*) + \frac{1}{2} l_{11}^2, \quad(26)$$

其中 $\bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l) = 1/2(n+1)^4 \varphi_l^4(z_l,\hat{\theta}_l) \eta_l^4((n+1) \mid z_l \mid \varphi_l(z_l,\hat{\theta}_l))$。

把式(21)和式(26)代入式(20),并结合不等式(22)得

$$LV_1 \leqslant z_1^3(g_{1,k}x_2 + \bar{f}_{1,k}(Z_1)) - \frac{3}{4} z_1^4 + \frac{1}{2} l_{11}^2 + \delta\vartheta_1 - \frac{b_m}{\lambda_1} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_i + \sum_{l=2}^{n} z_l^4 \bar{\phi}_{1,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l) + \sum_{l=2}^{n} z_l^4 \bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l) - z_1^4 \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{k} \bar{\phi}_{1,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l) - z_1^4 \sum_{j=1}^{n-2} j \sum_{k=1}^{j} \bar{\rho}_k^4(z_l,\hat{\theta}_l) - z_1^4 \sum_{j=2}^{n} j \sum_{k=1}^{j} \bar{\rho}_k^4(z_l,\hat{\theta}_l), \quad(27)$$

其中 $\bar{f}_{1,k}(Z_1) = \frac{3z_1}{4}(n+1) + \frac{9n}{8}(n+1)^2 z_1 - \dot{y}_d + z_1 \bar{\phi}_{1,k}^4(z_1,\hat{\theta}_1) + z_1 \bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l) + \frac{9}{8}(n +$

$1)^2 z_1 l_{11}^{-2}\rho_1^4((n+1)d^*)+\phi_{1,k}((n+1)d^*)\tanh\left(\frac{z_1^3\phi_{1,k}((n+1)d^*)}{\vartheta_1}\right)+z_1\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\bar{\phi}_{j,k}^4(z_1,\hat{\theta}_1)+z_1\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)+z_1\sum_{j=2}^{n}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)$。

因为 $\bar{\rho}_k$ 和 $\bar{\phi}_{j,k}$ 是未知光滑函数,所以 $\bar{f}_{1,k}(Z_1)$ 不能直接用于构造虚拟控制信号 α_1。用神经网络 $W_{1,k}^T S_{1,k}(Z_1)$ 近似未知函数 $\bar{f}_{1,k}(Z_1)$,对任意的 $\varepsilon_1>0$,有

$$\bar{f}_{1,k}(Z_1)=W_{1,k}^T S_{1,k}(Z_1)+\delta_1(Z_1),\quad |\delta_1(Z_1)|\leqslant\varepsilon_1,\tag{28}$$

其中 $\delta_1(Z_1)$ 表示逼近误差。由杨氏不等式,有

$$z_1^3\bar{f}_{1,k}(Z_1)=z_1^3\frac{W_{1,k}^T}{\|W_{1,k}\|}S_{1,k}\|W_{1,k}\|+z_1^3\delta_1(Z_1)\leqslant\frac{b_m}{2a_1^2}z_1^6\theta_1 S_{1,k}^T S_{1,k}+\frac{a_1^2}{2}+\frac{3}{4}z_1^4+\frac{\varepsilon_1^4}{4},\tag{29}$$

其中 $\theta_1=1/b_m\|W_{1,k}\|^2$。

结合式(28)(29)和式(17),式(27)可变为

$$LV_1\leqslant z_1^3 g_{1,k}z_2+z_1^3 g_{1,k}\alpha_1+\frac{b_m}{2a_1^2}z_1^6\theta_1 S_{1,k}^T S_{1,k}+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{4}\varepsilon_1^4+\frac{1}{2}l_{11}^2+\delta\vartheta-\frac{b_m}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1\dot{\hat{\theta}}_1+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\phi}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)-z_1^4\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\bar{\phi}_j^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_l,\hat{\theta}_l)-z_1^4\sum_{j=2}^{n}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)。\tag{30}$$

根据虚拟控制信号式(23),有

$$z_1^3 g_{1,k}\alpha_1\leqslant -k_1 g_{1,k}z_1^4-\frac{3}{4}g_{1,k}z_1^4-\frac{b_m}{2a_1^2}z_1^6\theta_1 S_{1,k}^T S_{1,k}。\tag{31}$$

把式(31)代入式(30),得

$$LV_1\leqslant z_1^3 g_{1,k}z_2-k_1 g_{1,k}z_1^4-\frac{3}{4}g_{1,k}z_1^4+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{4}\varepsilon_1^4+\frac{b_m}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1\left(\frac{\lambda_1}{2a_1^2}z_1^6 S_{1,k}^T S_{1,k}-\dot{\hat{\theta}}_1\right)+\frac{1}{2}l_{11}^2+\delta\vartheta+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\phi}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)-z_1^4\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\bar{\phi}_{j,k}^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=2}^{n}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)。\tag{32}$$

结合式(24),式(32)可变为

$$LV_1\leqslant z_1^3 g_{1,k}z_2-k_1 g_{1,k}z_1^4-\frac{3}{4}g_{1,k}z_1^4+\frac{1}{2}a_1^2+\frac{1}{4}\varepsilon_1^4+\frac{b_m\gamma_1}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1+\frac{1}{2}l_{11}^2+\delta\vartheta+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\phi}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)-z_1^4\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\bar{\phi}_{j,k}^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=2}^{n}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)。\tag{33}$$

利用下列不等式

$$z_1^3 g_{1,k}z_2\leqslant\frac{3}{4}g_{1,k}z_1^4+\frac{1}{4}g_{1,k}z_2^4,\tag{34}$$

$$\frac{b_m\gamma_1}{\lambda_1}\tilde{\theta}_1\hat{\theta}_1\leqslant\frac{b_m\gamma_1}{2\lambda_1}\theta_1^2+\frac{b_m\gamma_1}{2\lambda_1}\tilde{\theta}_1^2。\tag{35}$$

可得

$$LV_1\leqslant -c_{1,k}z_1^4-\frac{b_m\gamma_1}{2\lambda_1}\tilde{\theta}_1^2+d_1+\frac{1}{4}g_{1,k}z_2^4+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\phi}_{1,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{l=2}^{n}z_l^4\bar{\rho}_1^4(z_l,\hat{\theta}_l)-z_1^4\sum_{k=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{k}\bar{\phi}_j^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1)-z_1^4\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j}\bar{\rho}_k^4(z_1,\hat{\theta}_1),\tag{36}$$

其中 $c_1=k_1 g_{1,k}$,$d_1=b_m\gamma_1/2\lambda_1\theta_1^2+1/2a_1^2+1/4\varepsilon_1^4+\delta\vartheta+1/2l_{11}^2$。

第 $i(2\leqslant i\leqslant n-1)$ 步:类似于步骤1,得

$$LV_i\leqslant\sum_{j=1}^{i}\left(-c_j z_j^4-\frac{b_m\gamma_j}{2\lambda_j}\tilde{\theta}_j^2+d_j\right)+\frac{1}{4}g_{1,k}z_{i+1}^4+\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=i+1}^{n}z_l^4\bar{\phi}_{r,k}^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{s=1}^{i-1}S\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=i+1}^{n}z_l^4\bar{\rho}_r^4(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{s=1}^{i}\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=i+1}^{n}z_l^4\bar{\rho}_k^4(z_l,\hat{\theta}_l)-\sum_{s=1}^{i}\sum_{r=i+1}^{n-1}\sum_{j=1}^{r}z_s^4\bar{\phi}_{r,k}^4(z_s,\hat{\theta}_s)-\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=1}^{n-2}j\sum_{r=1}^{j}z_s^4\bar{\rho}_r^4(z_s,\hat{\theta}_s)-\sum_{s=1}^{i}\sum_{j=i+1}^{n}\sum_{r=1}^{j}z_s^4\bar{\rho}_r^4(z_s,\hat{\theta}_s),\tag{37}$$

其中 $c_j=k_j g_{j,k}$,$d_j=b_m\gamma_j/2\lambda_j\theta_j^2+1/2a_j^2+$

$1/4\varepsilon_j^{\,4}+\delta\vartheta+1/2\sum_{k=1}^{j}l_{jk}^{\,2}$, $j=1,2,\cdots,i$, l_{jk} 是正常数。

第 n 步:在这一步中,将构造一个实际控制输入 u。通过式(2)有

$$\mathrm{d}z_n=\left(g_{n,k}cv+g_{n,k}\mathrm{d}(v)+f_n-L\alpha_{n-1}\right)\mathrm{d}t+\left(h_{n,k}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}h_{j,k}\right)\mathrm{d}w,\tag{38}$$

其中 $L\alpha_{n-1}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}(g_{j,k}+f_j)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial\hat{\theta}_j}\dot{\hat{\theta}}_j+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial y_{d,k}^{(j)}}y_{d,k}^{j+1}+\frac{1}{2}\sum_{p,q=1}^{n-1}\frac{\partial^2\alpha_{n-1}}{\partial x_p\partial x_q}h_{p,k}^{T}h_{q,k}$。 (39)

构造下面的李雅普诺夫函数

$$V_n=V_{n-1}+\frac{1}{4}z_n^{\,4}+\frac{b_mc}{2\lambda_n}\tilde{\theta}_n^{\,2}。\tag{40}$$

利用式(2),有

$$LV_n=LV_{n-1}+z_n^{\,3}\left(g_{n,k}cv+g_{n,k}\mathrm{d}(v)+f_{n,k}-L\alpha_{n-1}\right)-\frac{b_mc}{\lambda_n}\tilde{\theta}_n\dot{\hat{\theta}}_n+\frac{3}{2}z_n^{\,3}\left\|h_{n,k}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}h_{j,k}\right\|^2。\tag{41}$$

假设虚拟控制信号 $\alpha_{j-2}(j=2,3,\cdots,n-2)$ 使得

$$V_{j-1}=V_1+\sum_{j=2}^{i-1}\left(\frac{1}{4}z_i^{\,4}+\frac{b_m}{2\lambda_i}\tilde{\theta}_i^{\,2}\right),$$

且满足

$$LV_{i-1}\leqslant\sum_{j=1}^{i-1}\left(-c_jz_j^{\,4}-\frac{b_m\gamma_j}{2\lambda_j}\tilde{\theta}_j^{\,2}+d_j\right)+\frac{1}{4}g_{n-1,k}z_i^{\,4}+\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=i}^{n}z_l^{\,4}\bar{\phi}_{r,k}^{\,4}(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{s=1}^{i-2}S\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=i}^{n}z_l^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{s}\sum_{l=i}^{n}z_l^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_l,\hat{\theta}_l)-\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{r=i}^{n-1}\sum_{j=1}^{r}z_s^{\,4}\bar{\phi}_j^{\,4}(z_s,\hat{\theta}_s)-\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{j=i-1}^{n-2}j\sum_{r=1}^{j}z_s^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_s,\hat{\theta}_s)-\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{j=i}^{n}\sum_{r=1}^{j}z_s^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_s,\hat{\theta}_s),\tag{42}$$

令 $k=n$,由式(41)得

$$LV_n\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\left(-c_jz_j^4-\frac{b_m\gamma_j}{2\lambda_j}\tilde{\theta}_j^{\,2}+d_j\right)+\frac{1}{4}g_{n-1,k}z_i^{\,4}+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{s}z_n^{\,4}\bar{\phi}_r^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)+\sum_{s=1}^{n-2}S\sum_{r=1}^{s}z_n^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)+\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{s}z_n^{\,4}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)-\sum_{s=1}^{i-1}\sum_{r=1}^{n}z_s^{\,4}\bar{\phi}_r^{\,4}(z_s,\hat{\theta}_s)+z_n^{\,3}\left(g_{n,k}cv+g_{n,k}\mathrm{d}(v)+f_{n,k}-L\alpha_{n-1}\right)+\frac{3}{2}z_n^{\,2}\left\|h_{n,k}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}h_{j,k}\right\|^2-\frac{b_mc}{\lambda_n}\tilde{\theta}_n\dot{\hat{\theta}}_n。\tag{43}$$

类似于式(26),如下不等式成立:

$$\frac{3}{2}z_n^{\,2}\left\|h_{n,k}-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}h_{j,k}\right\|^2\leqslant\frac{9}{8}(n+1)^2n^3z_n^{\,4}+\sum_{l=1}^{n}z_l^{\,4}\bar{\rho}_n^{\,4}(z_l,\hat{\theta}_l)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n}z_l^{\,4}\bar{\rho}_n^{\,4}(z_l,\hat{\theta}_l)+\frac{9}{8}(n+1)^2n^3z_n^{\,4}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\right)^4+\frac{9}{8}n^2(n+1)^2z_n^{\,4}l_{nn}^{\,-2}\rho_n^{\,4}((n+1)d^*)+\sum_{j=1}^{n}l_{nj}^{\,2}+\frac{9}{8}n^2(n+1)^2z_n^{\,4}\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\right)^4l_{nj}^{\,-2}\rho_j^{\,4}((n+1)d^*),\tag{44}$$

结合式(43)和式(44),得

$$LV_n\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}\left(-c_jz_j^{\,4}-\frac{b_m\gamma_j}{2\lambda_j}\tilde{\theta}_j^{\,2}+d_j\right)+z_n^{\,3}\left(g_{n,k}cv+g_{n,k}d(v)+\bar{f}_{n,k}(Z_n)\right)-\frac{3}{4}z_n^{\,4}-\frac{b_mc}{\lambda_n}\tilde{\theta}_n\dot{\hat{\theta}}_n,\tag{45}$$

其中

$$\bar{f}_{n,k}(Z_n)=f_{n,k}-L\alpha_{n-1}+\frac{1}{4}g_{n-1,k}z_n+\frac{9}{8}(n+1)^2n^3z_n+\frac{9}{8}(n+1)^2n^3z_n\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\right)^4+z_n\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{s}\bar{\phi}_{r,k}^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)+z_n\sum_{s=1}^{n-2}\sum_{r=1}^{s}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)+z_n\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=1}^{s}\bar{\rho}_r^{\,4}(z_n,\hat{\theta}_n)+\frac{9}{8}(n+1)^2n^2z_n\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\partial\alpha_{n-1}}{\partial x_j}\right)^4l_{nj}^{\,-2}\rho_j^{\,4}((n+1)d^*)+\frac{9}{8}(n+1)^2n^2z_nl_{nj}^{\,-2}\rho_j^{\,4}((n+1)d^*)+\frac{3}{4}z_n。\tag{46}$$

神经网络函数 $W_{n,k}^{T}S_{n,k}(Z_n)$ 近似于未知函数 $\bar{f}_{n,k}(Z_n)$。类似于式(29),有

$$z_n^{\,3}\bar{f}_{n,k}(Z_n)\leqslant\frac{b_mc}{2a_n^{\,2}}z_n^{\,6}\theta_nS_{n,k}^{T}S_{n,k}+\frac{a_n^{\,2}}{2}+\frac{3}{4}z_n^{\,4}+\frac{\varepsilon_n^{\,4}}{4},\tag{47}$$

其中未知常数 $\theta_n=\|W_{n,k}\|^2/cb_m$。构造虚拟控制输入

$$v(Z_n)=-\left(k_n+\frac{3}{4\zeta}\right)z_n-\frac{z_n^{\,3}}{2a_n^{\,2}}\hat{\theta}_nS_{n,k}^{T}(Z_n)$$

$S_{n,k}(Z_n)$, (48)

可以得到下面的不等式

$$z_n^3 g_{n,k} c v \leqslant -k_n g_{n,k} c z_n^4 - \frac{3 g_{n,k}}{4\zeta} c z_n^4 - \frac{b_m c}{2a_n^2} z_n^6 \hat{\theta}_n S_{n,k}^T S_{n,k}, \quad (49)$$

$$z_n^3 g_{n,k} \mathrm{d}(v) \leqslant \frac{3}{4\zeta} g_{n,k} c z_n^4 + \frac{1}{4c}\zeta b_M D^{*4}。 \quad (50)$$

把式(47)(49)和(50)代入式(45),并结合式(24),有

$$LV_n \leqslant -\sum_{j=1}^{n} c_j z_j^4 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{b_m \gamma_j}{2\lambda_j} \tilde{\theta}_j^2 - \frac{b_m c}{2\lambda_n} \gamma_n \tilde{\theta}_n^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j, \quad (51)$$

其中 $c_j = k_j g_{j,k} > 0, d_j = b_m \gamma_j / 2\lambda_j \theta_j^2 + 1/2a_j^2 + 1/4\varepsilon_j^4 + \delta\vartheta + 1/2 \sum_{k=1}^{j} l_{jk}^2, j = 1, 2, \cdots n-1, c_n = k_n g_{n,k} c > 0, d_n = b_m c / 2\lambda_n \gamma_n \theta_n^2 + 1/2a_n^2 + 1/4\varepsilon_n^4 + 1/4c\zeta b_M D^{*4}$。

至此,基于反步法自适应神经控制方案设计完成。下面,将给出闭路系统的稳定性分析。

令李雅普诺夫函数 $V = V_n, a_0 = \min\{4c_j, \gamma_j, j = 1, 2, \cdots, n\}, b_0 = \sum_{j=1}^{n} d_j$,则式(51)变为

$$LV \leqslant -a_0 V + b_0, t \geqslant 0。 \quad (52)$$

由文献[12]中的定理 4.1,得

$$\frac{\mathrm{d}E[V(t)]}{\mathrm{d}t} \leqslant -a_0 E[V(t)] + b_0, \quad (53)$$

并且满足

$$0 \leqslant E[V(t)] \leqslant \left(V(0) - \frac{b_0}{a_0}\right) \mathrm{e}^{-a_0 t} + \frac{b_0}{a_0}, \quad (54)$$

则有

$$E[V(t)] \leqslant V(0) + \frac{b_0}{a_0}, \forall t > 0, \quad (55)$$

其中 $V(0) = \sum_{j=1}^{n} 1/4 z_j^4(0) + \sum_{j=1}^{n} b_m / 2\lambda_j \tilde{\theta}_j^2(0) + b_m c / 2\lambda_n \tilde{\theta}_n^2(0)$。因此,根据不等式(55)和 V 的定义,闭路系统的所有信号在四次意义下半全局一致最终有界,$\tilde{\theta}_i$ 在均方值意义下半全局一致最终有界。

另外,由式(54)和引理 1,得

$$E[V(t)] \leqslant \frac{b_0}{a_0}, t \to \infty。 \quad (56)$$

因此,基于李雅普诺夫函数(40),误差信号最终收敛到紧集

$$\Omega_s = \left\{ z_i, \tilde{\theta}_i \mid \sum_{i=1}^{n} E[|z_i|^4] \leqslant 4\frac{b_0}{a_0}, |\tilde{\theta}_i| \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_i}{b_m} \frac{b_0}{a_0}}, |\tilde{\theta}_n| \leqslant \sqrt{\frac{2\lambda_n}{b_m c} \frac{b_0}{a_0}} \right\}, 1 \leqslant i \leqslant n-1。 \quad (57)$$

基于以上分析和讨论,能够得出下列定理。

定理 1 对于自适应神经控制系统(8),基于神经网络的近似性能,利用反步法,通过设计合适的李雅普诺夫函数(19),构造相应的控制信号(23),使得在任意转换之下,所有闭路系统的控制信号达到一致有界,并且收敛到相应的紧集。

3 结论

为了解决非严格反馈结构设计的困难,本文应用变量分离方法对未知状态变量进行分解。通过自适应反步法和径向基函数神经网络的近似性能,构造了一个任意转换之下的自适应神经控制算法,所设计的控制器保证了所有闭路系统信号半全局最终一致有界,在任意转换之下跟踪误差最终收敛到一个原点小邻域内。

参考文献:

[1] Wang Fang, Liu Zhi, Zhang Yun , et al. Adaptive quantized controller design via backstepping and stochastic small-Gain approach[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, 24(2): 330 - 343.

[2] 王维峰,汪宝彬,杨怀奎. 一类不带线性结构的随机最优控制问题的最大值原理[J]. 应用数学, 2017, 30(2): 445 - 456.

[3] Li Y, Zhang W H, Liu X K. Index for stochastic linear discrete-time systems[J]. Discrete Dynamics in Nature and Society, 2015, 2015: 1 - 10.

[4] Florchinger P. A universal formula for the stabilization of control stochastic differen-

tial equations[J]. Stochastic Analysis and Applications, 1993, 11(2): 155－162.

[5] Pan Z G, Basar T. Adaptive controller design for tracking and disturbance attenuation in parametric strict-feedback nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(8): 1066－1083.

[6] Liu Y G, Zhang J F. Practical output feedback risk-sensitive control for stochastic nonlinear systems under stable zero-dynamics [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2006, 45(3): 885－926.

[7] Liu Y G, Zhang J F. Reduced-order observer-based control design for nonlinear stochastic systems[J]. Systems & Control Letters, 2004, 52(2): 123－135.

[8] Deng H, Krsti'c M. Stochastic nonlinear stabilization, Part I: aback-stepping design [J]. Systems & Control Letters, 1997, 32(3): 143－150.

[9] Liu S J, Zhang J F, Jiang Z P. Decentralized adaptive output feedback stabilization for large-scale stochastic nonlinear systems [J]. Automatica, 2007, 43(2): 238－251.

[10] Xie X J, Duan N. Further results on output-feedback stabilization for a class of stochastic nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(5): 1208－1213.

[11] Xie X J, Duan N, Yu X. State-feedback control of high-order stochastic nonlinear systems with Si ISS inverse dynamics[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2011, 56(8): 1921－1926.

[12] Deng H, Krsti'c M, Willians R J. Stabilization of stochastic nonlinear systems driven by noise of unknown covariance [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(8): 1237－1253.

[13] Chen B, Liu X P, Liu K F, et al. Direct adaptive fuzzy control of nonlinear strict-feedback systems[J]. Automatica, 2009, 45(6): 1530－1535.

[14] Chen M, Ge S S, Ren B B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints [J]. Automatica, 2011, 47(3): 452－455.

[15] Liu Y J, Wang W, Tong S C. Robust adaptive tracking control for nonlinear systems based on bounds of fuzzy approximation parameters[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part A, Systems and Humans, 2010, 40(1): 170－184.

[16] Psillakis H E, Alexandridis A T. NN-based adaptive tracking control of uncertain nonlinear systems disturbed by unknown covariance noise [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, 18(6): 1830－1835.

[17] Liu X K, Li Y, Zhang W H. Stochastic linear quadratic optimal control with constraint for discrete-time systems[J]. Applied mathematics and computation, 2014, 228(1): 264－270.

[18] Chen W S, Jiao L C, Li J, et al. Adaptive NN-backstepping output-feedback control for stochastic nonlinear strict-feedback systems with time-varying delays[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B, Cybernetics, 2010, 40(3): 939－950.

[19] Li J, Chen W S, Li J M. Adaptive NN output-feedback decentralized stabilization for a class of large-scale stochastic nonlinear strict-feedback systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2011, 21(4): 452－472.

[20] Tao G, Kokotovic P V. Adaptive control of plants with unknown hysteresis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(2): 200－212.

（下转第 12 页）

[3] 童元伟，顾铮，卜胜利. 牛顿环与等倾干涉教学中的一点体会[J]. 大学物理，2013，32(12)：34－36.

[4] 曾凡光，富笑男. 用等厚干涉测定液体折射率[J]. 大学物理，1997，16(5)：24－25.

[5] 周国全. 牛顿环干涉装置的若干变异结构[J]. 武汉水利电力大学学报，2000，33(5)：110－112.

[6] 周国全，郭长明. 再论牛顿环干涉装置的若干变异结构[J]. 武汉大学学报：理学版，2005，51(1)：51－54.

[7] 张瑛，卢杰，杨枫. 用等厚干涉测液体的折射率[J]. 大学物理，2005，24(2)：44－45.

(责任编校：李秀荣)

(上接第 8 页)

[21] Wang H Q, Chen B, Liu K F, et al. Adaptive neural tracking control for a class of nonstrict-feedback stochastic nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems，2014，25(5)：947－958.

[22] Su C Y, Oya M, Hong H. Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems preceded by unknown backlash-like hysteresis[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems，2003，11(1)：1－8.

[23] Su C Y, Stepanenko Y, Svoboda J, et al. Robust adaptive control of a class of nonlinear systems with unknown backlash-like hysteresis[J]. IEEE Transactions on Automatic Control，2000，45(12)：2427－2432.

[24] Kurdila A J, Narcowich F J, Ward J D. Persistency of excitation in identification using radial basis function approximants[J]. SIAM Journal on Control and Optimization，1995，33(2)：625－642.

[25] Ploycarpou M M, Ioannou P A. A robust adaptive nonlinear control design[J]. Automatica，1996，32(3)：423－427.

[26] Sanner R M, Slotine J E. Gaussian networks for direct adaptive control[J]. IEEE Transactions on Neural Networks，1992，3(6)：837－863.

(责任编校：夏玉玲)