用 APOS 理论分析学生向量线性相关性概念的学习

王　成

（唐山学院 基础教学部，河北 唐山 063000）

摘要：介绍了 APOS 学习理论，并以 APOS 理论以及课堂观察、学生访谈为基础，分析了学生对向量线性相关性概念学习的发展过程。

关键词：APOS 理论；向量线性相关性；概念认知

中图分类号：O1-0；G642　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2015)06－0019－03

DOI：10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.06.008

On Students' Acquisition of Concepts Concerning Vector Linear Correlation with APOS Theory

WANG Cheng

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

Abstract: The author of this paper introduces the learning theory of APOS, and then analyzes student's learning of concepts concerning vector linear correlation through APOS theory, classroom observation, and interviews of students.

Key Words: learning theory of APOS; vector linear correlation; learning of concepts

1　数学概念二重性理论

数学的概念性知识与程序性知识的区别曾经在个体知识形成的讨论中得到广泛的关注，并且在有关知识获得这个更一般性问题的研究中一度占据核心地位。在许多学习理论中，研究者都强调了不同类型知识的区分，例如，Piaget 的概念性理解和成功的动作，Tulving 的语义记忆（semantic memory）和事件记忆（episodic memory），Anderson 的描述性知识与程序性知识。上世纪 80 年代，研究者逐渐开始关注程序性知识与概念性知识在数学学习中的关系及其发展。其中 Sfard，Dubinsky，Tall 等研究者都强调，许多数学概念，若将其作为一个静态的实体，那么它就具备对象的特点，若是将其作为一种数学运算，则体现了过程的特点[1－4]。一个概念往往兼有这样的二重性。处理一个非常规问题，常常需要在过程性思维与结构性思维之间灵活转换。因此他们的有关理论都称为数学概念二重性（过程－对象）理论。

2　“动作－过程－对象－图式”理论的分析

Piaget 认为平衡是认知发展的最根本的动力，从不平衡状态重新达到平衡状态主要通过反省抽象。Dubinsky 以 Piaget 关于儿童认知发展的基本观点[5－6]为基础，提出数学概念发展的“动作－过程－对象－图式”（简称 APOS）理论，探索高等数学学习的认知，迄今已经在抽象代数、微积分、离散数学、统计学等领域进行了多项研究。Dubinsky 认为，个体的数学知识是指个体在社会环境中通过建构、重构或组织已有的各种心智结构对数学问题情境做出的反应。数学概念的基本建构有三种：动作、过程、对象，并且这些心智结构又以某种方式组织成处理问题情境的图式。

动作（action）。既包括实际动作也包括抽象化的在思想上展开的动作。是指基于物理的或心智的对象所发生的转换，这种转换的特征是数学理论逐层抽象、系统建构的一种表现。个体要在明确的或回忆出的分步指导下才能执行操作或运算。即个体的思维至少还部分地受控于被转化的对象，一个动作可能只包含一个步骤。例如，学生看到函数 $y=3x+2$，便认为这是一个含字母的公式。动作也可能包含多个步骤，但下一步只能由上一步引出。例如，要把一个向量 v 表示为两个向量 e，f 的组合，有的学生第一步想到先建立一个向量方程：$v=xe+yf$，有了向量方程接着再将其表示成坐标形式，然后再表示成一个二元线性方程组，最后想如何解方程，

收稿日期：2015－07－08

作者简介：王成（1970－），男，河北唐山人，副教授，硕士，主要从事基础数学研究。

求出 x,y 的值。

根据 Von Glasersferd 的研究，当个体具有了动作图式就可以：①识别某个情境；②完成与这种情境相关联的活动；③能预测相同或类似活动的结果[7]。研究表明，概念图式（高级图式）形成困难的一个主要原因是没有充分意识到动作图式，注意的只是动作的结果。

过程（process）。当个体能够反思一个动作图式时，受外部驱使的动作逐渐转换为受个体控制的心智运算，并伴随反复操作最终趋于较少意识参与的自动化水平，这就是过程转换。从动作向过程的建构过程称为内化（interiorization），它的特征是借助想象完成心智运算，而不需要实际操作。例如，不需要特殊的向量或向量的坐标表示等外部刺激，学生就可以在思想中完成一系列操作，得出上述向量的线性表示问题就是求一个二元线性方程组的解。不仅如此，还可以在头脑中检验许多向量的类似运算过程，得出哪些向量是适合的，哪些向量是不适合的结论，即过程水平，个体逐渐通过思考所有向量以及所满足的条件代替对一个特殊向量的检验。

过程水平的概念理解表现为在相同或类似的问题情境与结果之间初步建立起联系。一旦学生建构起一个过程，就可能协调两个或更多的过程，成为一个新的过程或者建构过程的反演。比如，由一个整数能被 2，3 整除，推断出这个数能被 6 整除。又已知 $M=3^3\times5^5\times7$，能推断出 7 可以整除 M。再比如对函数而言，首先写出复合函数的表达式，才能计算复合函数的值。

对象（object）。当个体可以反思应用于一个过程的所有运算，并且能看作是一个整体，用更高水平的运算来操作时，一个过程就转换为对象。这个建构过程称为凝聚（encapsulation）。例如，要回答对于群 G 的某个子群 H 的左陪集的个数，或判断两个陪集是否相等或比较它们的势，就需要把陪集作为对象。要计算两个函数的和、差的极限或复合函数的极限，就要把极限概念作为对象。对象水平的理解是指学生能抽象出不同数学问题情境下实施的过程与结果之间的本质属性，脱离具体的问题情境预见活动的结果。在数学中，经常还要把一个对象通过解凝聚（de-encapsulate）返回到过程。例如，求两个函数和的极限，通常要返回到先求每个函数的极限，然后再求和式的极限。

对象是认知意义上个体的心智对象，对于过程与对象的关系，Davis 曾运用信息加工的观点形象地说，“当第一次执行一个程序时，我们要一步一步的进行。……当反复执行多次后，程序本身成为一个独立存在的事物，可以作为一个输入值或者可以详细检查的对象”[8]，这表明从动作向对象的认知发展虽然存在于一个共同的基础上，但是二者具有质的差异。凝聚，是指当一个物理的或心智的动作在更高的思维平面上被重构或重组，从而能够达到理想的心智运算。

图式（schemas）。一个数学主题经常涉及许多动作、过程和对象，这些动作、过程、对象以及有关图式连接在一起就形成一个新的图式。群的概念图式通常由集合图式、二元运算图式、公理图式组成，其中集合与二元运算的图式通过公理图式协调在一起。检验一个集合上的二元运算是否符合与群有关的四条公理对应的四个过程，可以通过凝聚这四个过程获得四个对象，这也是公理图式的一个基本成分。

图式还可以进一步主题化（thematizing），成为一个新的对象。Dubinsky 认为，如果个体能把一个图式作为一个整体的对象来思考和操作，这个图式就已经实现主题化。例如，当需要确定某个集合以及定义在其上的一种二元运算是否构成一个群时，群的图式就主题化为一个对象。类似的，确定一个群可能具有的各种性质，或者考虑两个给定的群是否同构都需要先激活相应的图式（主题化），使之成为一个对象。对象又可以经解主题化的过程重新获得原来图式中的关系及要素。主题化的意义是个体通过对图式进行反思形成一个程序组块，从而便于在不同的情境下提取。如果一个图式没有主题化，认知个体会表现为虽然掌握相关知识，但遇到相应的数学的或现实的问题，不能自觉地应用它解决。

3 用 APOS 理论分析学生对向量线性相关性概念认知的发展过程

Harel Guershon 等提出“线性代数”教学的几何取向，并通过教学实验得出采取这种教学方式有利于高中生以及大学生对相关性、向量空间等概念的理解的结论。本文将探讨大学生学习向量线性相关性概念的过程以及其错误概念形成的原因，主要依据是 APOS 理论以及笔者在“线性代数”教学中的课堂观察和学生访谈。

3.1 动作

线性相关性概念始于向量组的元素是具体数值的特例，通常是 R^2,R^3,R^4 中的一些向量组，例如，$\delta_1=(-1,0,1)$，$\delta_2=(1,1,1)$，$\delta_3=(1,2,3)$。笔者开始授课时，根据定义写出线性组合的形式：$c_1(-1,0,1)+c_2(1,1,1)+c_3(1,2,3)=0$，这是一个齐次线性方程组，然后写出对应的方程组，这样就能使学生意识到要判定组向量的相关性，只要判定齐次线性方程组是否有非零解即可。对于具有“动作”水平的学生，他们把判定向量的相关性看作一种“程序性活动”，因此不能回答对于给定的一组向量如何判定向量线性相关性这个一般性问题。例如，怎样判定向量 a_1,a_2,a_3,a_4 的线性相关性：$a_1=(6,2,3)$，$a_2=(2,-3,7)$，$a_3=(3,2,0)$，$a_4=(1,-2,3)$？一名学生写出矩阵 $\begin{pmatrix}6&2&3\\2&-3&7\\3&2&0\\1&-2&3\end{pmatrix}$，似乎在进行行初等变换。但他显然并不知道怎样对矩阵进行行初等变换，当笔者问学生：“这个矩阵是什么？这样做的目的是什么？”这名学生回

答:“老师上课时就是这样做的,但记不清了。”此时需要教师进一步引导。

3.2　过程

(1)过程 1——内化动作。建构程序性理解,即认为是求齐次线性方程组有无非零解的过程决定向量组的相关性,因而运算活动有一定目的性。例如,把判定向量 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是否线性无关看作检验向量方程 $x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_na_n=0$ 是否有且只有零解的问题。

(2)过程 2——用矩阵理论重构过程 1。用 m 维向量 a_1,$a_2,\cdots,a_n$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩与未知元的关系判定线性方程组 $\boldsymbol{A}X=0$ 是有唯一一组零解,还是有无数组解。即当 $r(\boldsymbol{A})<n$(未知元个数)时,向量线性相关;当 $r(\boldsymbol{A})=n$ 时,向量线性无关。把未知元个数 n 等同于系数矩阵的列数,而不是向量的个数。此时,对于给定的一组向量,怎样判定向量线性相关或线性无关就变得有意义,但学生还没有建立起矩阵的秩、未知元个数与向量的维数、个数之间的关系。例如,怎样判定 n 维向量组 $\eta_1=(1,1,0,0,0,\cdots,0)$,$\eta_2=(0,1,1,0,0,\cdots,0)$,$\eta_3=(0,0,1,1,0,\cdots,0)$,……,$\eta_{m-1}=(0,0,\cdots,1,1,0,\cdots,0)$,$\eta_m=(0,0,\cdots,0,1,1,\cdots,0)$的线性相关性?这要看系数矩阵的秩:一个 $n\times m$ 矩阵,如果它的秩小于 m 就线性相关;如果秩等于 m 就线性无关。例如,判定向量 a_1,a_2,a_3,a_4 的线性相关性:$a_1=(6,2,3)$,$a_2=(2,-3,7)$,$a_3=(3,2,0)$,$a_4=(1,-2,3)$,许多学生就采取了化简系数矩阵计算秩,然后比较秩与未知元个数的方法。

3.3　对象

对象能把前面的“过程”凝聚为一个整体。当学生对线性相关性的理解已经脱离程序方面而关注其本质属性,能把相关性看作一个向量或向量组的特有属性,即一个向量(组)或者线性相关,或者线性无关,建构起向量组的行列数、矩阵的秩、未知元的个数以及线性方程的个数之间的关系,就能用其解释相关性的若干性质。例如,当 $k>n$ 时,k 个 n 维向量 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 必线性相关。例如,判定向量 a_1,a_2,a_3,a_4 的线性相关性:$a_1=(6,2,3)$,$a_2=(2,-3,7)$,$a_3=(3,2,0)$,$a_4=(1,-2,3)$,因为向量的维数小于个数,因此向量线性相关。

3.4　图式

所有的动作、过程、对象与已有的向量图式、矩阵图式、线性方程组的图式、线性表示的图式等,可以形成一个贯通的新图式,并可以通过主题化形成一个更高层级的对象。例如,当学生认识到初等变换不改变向量组的线性相关性之后,通过同化和顺应就可以逐步建立与向量空间的维数、生成集以及生成空间的关系,形成完整的相关性概念。例如,维数的概念使学生认识到在有限维向量空间中,一个无关向量集合不能“无限制的大”。如果无关组 $S=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 生成一个向量空间 V,则对 V 中任意集合,如果向量个数大于 n,则向量集合线性相关。对于问题“若 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 线性相关,则向量组 $a_1+k_1a_5,a_2+k_2a_5,a_3+k_3a_5,a_4+k_4a_5$,$a_5$ 是否线性相关?(k_i 为任意常数)”,学生开始时习惯用定义去证明,但经笔者启发后,许多学生可以用初等变换的性质给出解释。

4　几点分析

第一,“动作－过程－对象－图式”勾勒的是一个分等级顺序发展的序列,但个体的数学概念的发展并不总是严格遵循这个序列,经常表现出相互作用、出现暂时的方向改变、从过程回到动作、从对象回到过程等来来回回的运动现象。

第二,APOS 序列主要关注的是数学概念发展的认知机制[9],即各种心智结构的关系及其发展,并非某个数学主题内容的逻辑分析。一个数学概念发展的 APOS 序列通常要经历理论分析,以及来自学生的数据分析反馈,然后修正理论分析结果,并在教学中不断循环检验。

第三,在数学学习中,一般认为有两种典型的认知结构:竖向等级结构和网络结构。前者是一种序列动作图式,可以及时发生,长期稳定地存在,并不断加强,与其它的动作图式合并为认知联结;后者是多元联结的图式,这是人类大脑的物理结构所特有的,它以许多认知单元为结点,同时可以获得许多可能的联结,从而建立更精细、灵活的方式。事实上,APOS 序列由这两种发展方式组成,即把不同形态的等级序列(过程－对象)看作不同的认知单元,即网络上的结点,等级序列的与象网状的结构(图式－概念)共存在一个更强大的结构中。这正是数学概念二重性理论的核心。

数学学习是再创造再发现的过程,教师要引导学生积极参与其中,不断激发他们的智慧,培养其数学思维能力,从而真正提高数学素质。

参考文献:

[1]　Tall D, Vinner S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity[J]. Eductional studies in mathematics, 1981,12(2):151－169.

[2]　Gray E, Tall D. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics[J]. Published in Proceedings of PME25,2001(8):65－72.

[3]　Sfard A. On the dual nature of mathematical conception: reflctions on processes and objects as different sides of the same coin[J]. Educational Studies in Mathematics,1991(22):1－36.

[4]　Dubinsky Ed, Elterman F. The student's construction of quantification[J]. For the Learning of Mathematics, 1988,8(2):44－51.

(下转第 46 页)

表 2　轮构架优化前后参数对比

项目	设计变量		状态变量	目标函数
	宽度/mm	厚度/mm	应变/mm	质量/kg
优化前	420	400	0.363	3 360.4
优化后	304.2	355.5	4.247	1 974.1

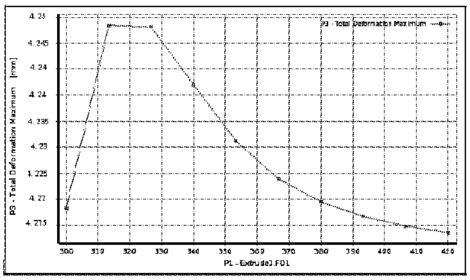

图 5　轮构架侧梁宽度迭代关系曲线

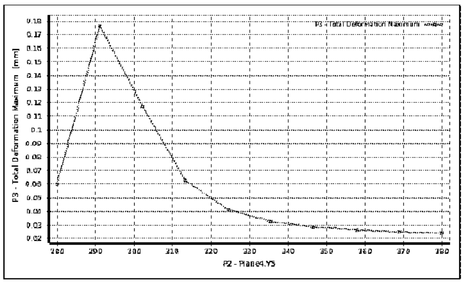

图 6　轮构架侧梁厚度迭代关系曲线

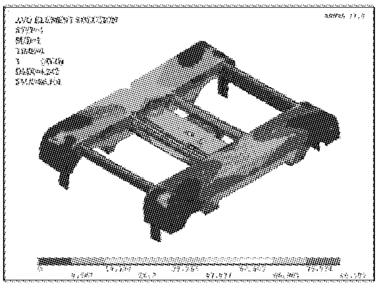

图 7　轮构架优化后等效应力云图

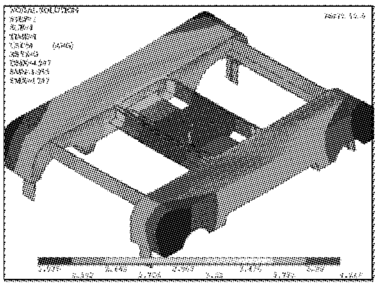

图 8　轮构架优化后位移云图

4　结论

基于 Pro/E 软件对动车工艺转向架轮构架进行了三维造型,并利用 ANSYS 软件对轮构架进行了静力分析和优化。优化后轮构架侧梁宽度比优化前减少了 115.8 mm,厚度减小了 44.5 mm,优化后重量减少了 41%,最大位移从 0.363 mm增大到 4.247 mm,优化后的最大应力 86.101 MPa 远小于材料在运营工况下的许用应力 142 MPa。因此,通过优化大大减轻了轮构架的重量,达到了优化的目的,位移和应力都符合设计要求,从而节约了材料,降低了成本。

参考文献:

[1] 李鹏程,熊禾根.基于 AWE 的工艺转向架构架优化设计研究[J].制造业自动化,2011,33(12):110-113.

[2] 杨磊,赵志苏.磁悬浮列车转向架结构强度的有限元分析[J].机械,2004,31(2):13-16.

[3] 刘建林.新型单轨车转向架的研究[J].电力机车技术,2001,24(3):41-44.

[4] 宋向辉,王红,商跃进.动车转向架构架强度分析[J].机械研究与应用,2012(1):1-3.

[5] 刘林华,辛勇,汪伟.基于折衷规划的车架结构多目标拓扑优化设计[J].机械科学与技术,2011,30(3):15-17.

[6] 魏云平,肖春英,孙希跃.重介质管路中平板闸阀结构改进[J].唐山学院学报,2006,19(3):106-108.

(责任编校:李秀荣)

(上接第 21 页)

[5] Brown A Devries, Dubinsky D J. Learning binary operations, groups and subgroups[J]. Journal of Mathematical Behavior, 1997, 16(3): 187-239.

[6] Dubinsky Ed. A reaction to "a critique of the selection of mathematical objects' as a central metaphor for advanced mathematical thinking" by confrey and costa [J]. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1997(2): 67-91.

[7] Glasersfeld E Von. Cognition, construction of knowledge and teaching [J]. Synthese, 1988, 80(1): 121-140.

[8] Davis R B. Learning mathematics: the cognitive science approach to mathematics education [M]. London: Routledge, 1984: 125-127.

[9] Hiebert J, Lefevre P. Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis [M]. Appleton: Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1987: 1-22.

(责任编校:夏玉玲)