第 28 卷第 6 期
2015 年 11 月

唐山学院学报
Journal of Tangshan College

Vol. 28 No. 6
Nov. 2015

# 均匀分布场合下参数的极大似然估计

郝玉芹

（唐山学院 基础教学部，河北 唐山 063000）

**摘要**：针对不同区间上的均匀分布，应用次序统计量，给出了未知参数的极大似然估计，并讨论了估计量的无偏性。

**关键词**：均匀分布；次序统计量；极大似然估计

**中图分类号**：O212.1　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2015)06－0017－02

**DOI**：10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.06.007

## On Estimation of Parameter Maximum Likelihood in Uniform Distribution

HAO Yu-qin

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

**Abstract**: The author of this paper estimates the maximum likelihood of unknown parameters against the uniform distribution of different intervals and with order statistics, and discusses biasedness of the estimation.

**Key Words**: uniform distribution; order statistics; maximum likelihood estimattion

## 0　引言

极大似然估计（Maximum Likelihood Estimate，简称 MLE）是数理统计中最重要、应用最广泛的参数点估计方法，其思想始于 Gauss 的误差理论，1821 年由 Gauss 首先提出，但当时并未获得广泛应用。R. A. Fisher 在 1912 年对 Gauss 提出的 MLE 进行了理论探讨，将它作为一个一般的点估计方法提了出来，从而获得了大家的认同，之后许多统计学家探讨了 MLE 的性质，使这种估计方法得到了广泛的研究和应用。

在各种估计方法中，MLE 相对地说比较优良，比如 MLE 的不变性（原则）作为一种统计思想有其合理性，得到了人们的认可。尤其是在大样本场合下，MLE 的优良性更为明显，有很好的结果，比如相合性与渐近正态性等[1]。但也有不足之处，MLE 要求样本联合分布有参数形式，在分布未知而要估计均值和方差时就无能为力了。同时，在小样本场合下，还不能显现出它的优良性。

设总体 $X$ 服从均匀分布，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自总体的一个样本，它们相互独立，与总体具有相同分布，$(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本的取值。记次序统计量为 $X_{(1)}=\min(X_1,\cdots,X_n)$，$X_{(n)}=\max(X_1,\cdots,X_n)$，次序统计量的取值记为 $x_{(1)},\cdots,x_{(n)}$，总体分布函数记为 $F(x)$，总体的概率密度函数记为 $f(x)$，总体的数学期望为 $E(X)$。

在现实生活中，如计算机产生的随机数、正弦波的随机相位、候车时间和计算时“四舍五入”产生的舍入误差等问题通常都服从均匀分布，这显示了均匀分布的重要性。本文讨论不同区间上均匀分布参数的极大似然估计，并讨论估计量的无偏性。

## 1　均匀分布参数的极大似然估计

### 1.1　具有唯一极大似然估计的情形

#### 1.1.1　总体 $X$ 服从均匀分布 $U(0,\theta)$ 的场合

简记 $X\sim U(0,\theta)$，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自总体的一个样本，$(x_1,\cdots,x_n)$ 为样本的取值。

这时 $X_i$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta},0<x_i<\theta\\0,\text{其它}\end{cases}$，$i=1,\cdots,n$，$\theta$ 为待估参数（$\theta>0$），似然函数为 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n},0<x_i<\theta\\0,\text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n},0<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta\\0,\text{其它}\end{cases}$，无法由似然方程 $L'(x_1,\cdots,x_n;\theta)=0$ 求 $\theta$ 的极大似然估计。根据极大似然估计的定义，使似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\dfrac{1}{\theta^n}$ 取得最大值，由表达式可知，$\theta$ 越小似然函数越大，当 $\theta$ 为 $x_{(n)}$ 时似然函数取

收稿日期：2015－07－02
作者简介：郝玉芹（1958—），女，河北唐山人，副教授，主要从事高等数学与工程数学研究。

最大值，因此参数 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}$，且唯一。

**定理 1** $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}$ 是有偏估计。

证明 由最大(小)值分布[2] $F_{\max}(x)=[F(x)]^n$，得 $X_{(n)}$ 分布函数当 $0<x<\theta$ 时为 $F_{\max}(x)=(\frac{x}{\theta})^n$，对 $x$ 求导数，得 $X_{(n)}$ 的概率密度函数 $g(x)=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n},0<x<\theta\\0,其它\end{cases}$，那么，$E(\hat{\theta})=E(X_{(n)})=\int_0^\theta xg(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta \frac{nx^n}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n\theta}{n+1}\neq\theta$，因此 $\hat{\theta}=X_{(n)}$ 是 $\theta$ 的有偏估计。证毕。

推论 1 $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 是 $\theta$ 的无偏估计量。

证明 由定理 1 可知，$E(\frac{n+1}{n}X_{(n)})=\frac{n+1}{n}E(X_{(n)})=\frac{n+1}{n}\frac{n\theta}{n+1}=\theta$。

估计量的无偏性是一种优良的性质，但是在一个具体问题中，无偏性的实际价值如何，还必须结合问题的具体情况去考察。

1.1.2 总体 $X$ 服从均匀分布 $U(\theta,2\theta)$ 的场合

设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体的一个样本，$(x_1,\cdots,x_n)$为样本的取值，这时 $X_i$ 的密度函数为 $f(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{\theta},\theta<x_i<2\theta\\0,其它\end{cases}$，$i=1,\cdots,n$，$\theta$ 为待估参数$(\theta>0)$，似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n},\theta<x_i<2\theta\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n},\theta<x_{(1)}<x_{(n)}<2\theta\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n},\frac{1}{2}<\theta<x_{(1)}\\0,其它\end{cases}$，无法由似然方程求 $\theta$ 的极大似然估计，根据极大似然估计的定义，那么，当 $\frac{1}{2}x_{(n)}<x_{(1)}$ 时，使似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 取得最大值的 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}x_{(n)}$，因此 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}X_{(n)}$，且唯一。

推论 2 $\hat{\theta}=\frac{1}{2}X_{(n)}$ 是 $\theta$ 的有偏估计。

**定理 2** 一般地，若总体 $X$ 服从均匀分布 $U(k\theta,(k+1)\theta)$，$k\geqslant0$，$\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{k+1}X_{(n)}$，且 $\hat{\theta}$ 是 $\theta$ 的有偏估计。

证明 总体 $X$ 服从均匀分布 $U(0,\theta)$ 的场合是 $k=0$ 时的特例；总体 $X$ 服从均匀分布 $U(\theta,2\theta)$ 的场合是 $k=1$ 时的特例。由 1.1.2 的推论可知，似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n},\frac{1}{k+1}x_{(n)}<\theta<\frac{1}{k}x_{(1)}\\0,其它\end{cases}$，那么，当 $\frac{1}{k+1}x_{(n)}<\frac{1}{k}x_{(1)}$ 时，使似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 取得最大值的 $\hat{\theta}=\frac{1}{k+1}x_{(n)}$，因此 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=\frac{1}{k+1}X_{(n)}$，且唯一。

又 $E(\hat{\theta})=E(\frac{1}{k+1}X_{(n)})=\frac{1}{k+1}\frac{n\theta}{n+1}\neq\theta$，因此 $\hat{\theta}=\frac{1}{k+1}X_{(n)}$ 是 $\theta$ 的有偏估计。

### 1.2 极大似然估计不唯一的情形

1.2.1 总体 $X$ 服从均匀分布 $U(\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2})$ 的场合

设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体的一个样本，$(x_1,\cdots,x_n)$为样本的取值，这时 $X_i$ 的密度函数为 $f(x_i)=\begin{cases}1,\theta-\frac{1}{2}<x_i<\theta+\frac{1}{2}\\0,其它\end{cases}$，$i=1,\cdots,n$，$\theta>0$ 为待估参数。似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}1,\theta-\frac{1}{2}<x_i<\theta+\frac{1}{2}\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}1,\theta-\frac{1}{2}<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta+\frac{1}{2}\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}1,-\frac{1}{2}<\theta<x_{(1)}+\frac{1}{2}\\0,其它\end{cases}$，那么，当 $0<x_{(n)}-\frac{1}{2}<x_{(1)}+\frac{1}{2}$ 时，似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 取得最大值的 $\theta$ 应为区间 $\left[x_{(n)}-\frac{1}{2},x_{(1)}+\frac{1}{2}\right]$ 上的每一点，因此，参数 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}-\frac{1}{2}+\delta(X_{(1)}-X_{(n)}+1)=(1-\delta)X_{(n)}+\delta X_{(1)}-\frac{1}{2}+\delta$，$0\leqslant\delta\leqslant1$，不唯一。

1.2.2 总体服 $X$ 从均匀分布 $U(\theta,\theta+1)$ 的场合

设$(X_1,\cdots,X_n)$是来自总体的一个样本，$(x_1,\cdots,x_n)$为样本的取值，这时 $X_i$ 的密度函数为 $f(x_i)=\begin{cases}1,\theta<x_i<\theta+1\\0,其它\end{cases}$，$i=1,\cdots,n$，$\theta$ 为待估参数$(\theta>0)$，似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)=\begin{cases}1,\theta<x_i<\theta+1\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}1,\theta<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta+1\\0,其它\end{cases}=\begin{cases}1,x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}\\0,其它\end{cases}$，无法由似然方程求 $\theta$ 的极大似然估计，根据极大似然估计的定义，当 $0<x_{(n)}-1<x_{(1)}$ 时，使似然函数 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 取得最大值的 $\theta$ 应为区间 $[x_{(n)}-1,x_{(1)}]$ 上的每一点，因此参数 $\theta$ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}=X_{(n)}-1+\delta(X_{(1)}-X_{(n)}+1)=(1-\delta)X_{(n)}+\delta X_{(1)}-1+\delta$，$0\leqslant\delta\leqslant1$，不唯一。

## 2 结论

似然函数是样本的联合分布密度，极大似然估计就是求似然函数的最大值点，对于均匀分布来讲，不能从似然方程 $L'(x_1,\cdots,x_n;\theta)=0$ 求得。另外，参数的极大似然估计不一定唯一，也不一定是参数的无偏估计。

## 参考文献：

[1] 成平，陈希孺，陈桂景，等. 参数估计[M]. 上海：上海科学技术出版社，1985：78.

[2] 沈恒范. 概率论与数理统计教程[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2003：80.

（责任编校：夏玉玲）