第 28 卷第 6 期 唐山学院学报 Vol. 28 No. 6
2015 年 11 月 Journal of Tangshan College Nov. 2015

Cayley 树指标集马氏链的射线常返性

范振耀

（唐山学院 基础教学部，河北 唐山 063000）

摘要：给出了 Cayley 树边界$\partial T_{C,2}$的集合形式，研究在不限定根顶点 O 的条件下，Cayley 树指标集马氏链的射线常返性，得出了 Cayley 树指标集马氏链或者强常返，或者非常返的结论。

关键词：Cayley 树；树指标集马氏链；射线常返性

中图分类号：O211.62　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2015)06－0009－02

DOI：10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.06.004

On the Ray Recurrence of the Markov Chains of the Cayley Tree Index Set

FAN Zhen-yao

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

Abstract: The author of this paper obtains the set of the Cayley tree boundary of $\partial T_{C,2}$, studies the ray recurrence of the Markov chains of Cayley tree index set under the condition of unlimited root vertex, and concludes that the Markov chains of Cayley tree index show either strong recurrence or nonrecurrence.

Key Words: Cayley tree; Markov chains of tree index set; ray recurrence

0 引言

设 $T_{C,2}$为一 Cayley 树，即 $T_{C,2}$树上任一顶点都有两个子代，$T_{C,2}$的边界记为$\partial T_{C,2}$，表示由根顶点 O 出发的所有射线上的顶点组成的集合，$\partial T_{C,2}^{n}$表示由根顶点 O 出发到第 n 层上的顶点的所有路径上的顶点组成的集合。

树指标集随机过程是近年发展起来的概率论的一个新的研究方向。Spitzer 首先研究了 Markov 随机场[1]，Berger 和叶中行研究了齐次树图上平稳随机场熵率的存在性[2]，杨卫国利用分析方法研究了树指标集马氏链一般的强大数定律，给出了齐次树指标集马氏链的若干极限性质[3]，党慧、杨卫国研究了二叉树上分支马氏链定义的等价形式，并指出，在二叉树情况下，树指标集马氏链是特殊的分支马氏链[4]。树指标集马氏链的概念是 Benjamin. I 和 Peres 首先提出来的，其本质是 Markov 随机场，他们研究了树指标集马氏链常返和射线常返的性质，是假定根顶点 O 在确定的条件($T_0\equiv x_0, x_0\in G, G\in \mathbf{N}$)下讨论的，并且文章提出了若干问题，其中一个问题是树指标马氏链的常返性是否依赖于根顶点 x_0[5]。范振耀、金少华、边静指出在不限定根顶点 O 的条件下，有限状态集合树指标集马氏链或者非常返，或者强常返，并给出了在有限状态空间下树指标集马氏链的充分条件[6]。本文将在不限定根顶点 O 条件下，论证 Cayley 树指标集马氏链或者强射线常返性，或者非射线常返性。

1 主要结论

若树指标集马氏链以正的概率访问状态 k 无穷多次，则状态 k 为常返；若树指标集马氏链在一条射线上以正的概率访问状态 k 无穷多次，则状态 k 为射线常返。设$\{S_\sigma,\sigma\in T\}$为树 T 指标集马氏链，G 为一可数状态集合，$\forall k\in G$，若 $P(\exists \xi\in\partial T,\sum\limits_{\sigma\in\xi} I_{(S_\sigma=k)}=\infty)>0$，则称状态 k 为射线常返；若 $P(\exists \xi\in\partial T,\sum\limits_{\sigma\in\xi} I_{(S_\sigma=k)}=\infty)=1$，则称状态 k 为强射线常返。

首先给出$\partial T_{C,2}^{n}$的集合表达形式。

对于 Cayley 树 $T_{C,2}$第 n 层共有 2^n 个顶点($n\geqslant 0$)，设 σ_n 为其中任意一个，记作 $A=\{\sigma_n\}$。

Step1：若 $S(\sigma_{n-1})=\sigma_n$，则 $A=\{\sigma_{n-1},\sigma_n\}$；

Step2：若 $S(\sigma_i)=\sigma_j$，则 $A=\{\sigma_n,\sigma_{n-1},\cdots,\sigma_j,\sigma_i\}$；

Step3：若 $\sigma_i\neq 0$，重复 Step2，若 $\sigma_i=0$，则 $A=\{\sigma_n,\sigma_{n-1},\cdots,\sigma_1,\sigma_0\}$，其中 σ_0 为根顶点，σ_i 为第 i 层上的顶点。

由以上方法，我们可以得到 Cayley 树 $T_{C,2}$第 n 层上任意一个顶点到根顶点 O 的一条路径，用(n,j)表示 Cayley 树 $T_{C,2}$第 n 层上的第 j 个顶点，(0,0)为根顶点 O，设 $A_{(n,j,o)}$ 表

收稿日期：2015－06－15

基金项目：河北省自然科学基金项目(A2015105073)；河北省高等学校科学技术研究项目(Z2014017)；唐山学院教科研项目(JG1405)

作者简介：范振耀(1979－)，男，河北故城人，讲师，硕士，主要从事概率论极限定理研究。

示 $T_{C,2}$ 第 n 层上的第 j 个顶点到根顶点 O 的路径，则 $\partial T^n_{C,2}=\{A_{(n,0,o)},A_{(n,1,o)},\cdots,A_{(n,2^n,o)}\}$，简记为 $\partial T^n_{C,2}=\{A_{(n,0)},A_{(n,1)},\cdots,A_{(n,2^n)}\}$。

在 $T_{C,2}$ 中，每个顶点都有两个子代，所以在 $\partial T^n_{C,2}$ 中的每个元素都可以产生两个后继集合。以 $A_{(n,0)}$ 为例，$A_{(n,0)}=\{(n,0),(n-1,0),\cdots,(1,0),(0,0)\}$，又 $S((n,0))=(n+1,0)$，$S((n,0))=(n+1,1)$，所以，由 $A_{(n,0)}$ 产生的后继集合为：$A_{(n+1,0)}=\{(n+1,0),(n,0),\cdots,(0,0)\}$，$A_{(n+1,1)}=\{(n+1,1),(n,0),\cdots,(0,0)\}$。

以 $A^+_{(n,0)}$ 表示 $A_{(n,0)}$ 的后继集合，则 $\partial T^{n+1}_{C,2}=\{A^+_{(n,0)},A^+_{(n,1)},\cdots,A^+_{(n,2^n)}\}$。

依次类推可得到 $\partial T^{n+2}_{C,2},\partial T^{n+3}_{C,2},\cdots$。

则 $\partial T_{C,2}=\lim\limits_{n\to\infty}\partial T^n_{C,2}$。

定理　设 $T_{C,2}$ 为一 Cayley 树，$\{S_\sigma,\sigma\in T_{C,2}\}$ 为 Cayley 树指标集马氏链，G 为一可列集合，对于 $\forall k\in G$，$A=\{\omega:\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{(S_{\sigma_n}=k)}<+\infty,S(\sigma_n)=\sigma_{n+1}\}$，则 $P(A)=0$ 或者 $P(A)=1$。

证明　由以上构造 $\partial T_{C,2}$ 的过程可知，$\sum\limits_{\sigma\in\xi}I_{(S_\sigma=k)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{(S_{\sigma_n}=k)}$，$\xi\in\partial T_{C,2}$，$\sigma_{n+1}=S(\sigma_n)$。

设 $S_n(k,\omega)=\sum\limits_{i=0}^{n}I_{(S_{\sigma_i}=k)}$，$F_n=\sigma\{I_{(S_{\sigma_0}=k)},I_{(S_{\sigma_1}=k)},\cdots,I_{(S_{\sigma_n}=k)}\}$。

因为 $E(S_n(k,\omega))=E(\sum\limits_{i=0}^{n}I_{(S_{\sigma_i}=k)}|F_{n-1})=E(\sum\limits_{i=0}^{n-1}I_{(S_{\sigma_i}=k)}+I_{(S_{\sigma_n}=k)}|F_{n-1})=S_{n-1}(k,\omega)+E(I_{(S_{\sigma_n}=k)}|F_{n-1})\geqslant S_{n-1}(k,\omega)$。

所以 $\{S_n(k,\omega),F_n,n\geqslant1\}$ 为一个下鞅。

若 $\sup\limits_n E(S_n)<+\infty$，则由 Doob 鞅收敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S_\infty<+\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{(S_{\sigma_n}=k)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\sigma\in L_n}I_{(S_\sigma=k)}=\sum\limits_{\sigma\in\xi_n}I_{(S_\sigma=k)}<\infty$，则 $P(A)=1$。$\sup\limits_n E(S_n)=+\infty$，又 $\{ES_n\}$ 单调递增，所以有

$$\lim_{n\to\infty}ES_n=+\infty,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_{(S_{\sigma_n}=k)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{\sigma\in L_n}I_{(S_\sigma=k)}=\sum\limits_{\sigma\in\xi_n}I_{(S_\sigma=k)}=\infty$，则有 $P(A)=0$。

由定理可知，在不限定初始状态下，Cayley 树指标集马氏链或者非常返，或者强常返。即我们可以按照常返性将可列状态 G 分为两个集合 G_1,G_2，当初始状态选 G_1 中元素时，Cayley 树指标集马氏链是强常返的，当初始状态选 G_2 时，Cayley 树指标集马氏链是非常返的。

参考文献：

[1] Spitzer F. Markov random fields on an infinite tree[J]. Ann Probab,1975(3):387－398.

[2] Berger T,Ye Z. Entropic aspects of random fields on trees[J]. IEEE Trans inform Theory,1990,36(5):1006－1018.

[3] Yang Weiguo. Some limit properties for Markov chains indexed by a homogeneous tree[J]. Statistics & Probability Letters,2003,65(3):241－250.

[4] 党慧,杨卫国. 二叉树上分支马氏链的等价性质[J]. 应用概率统计,2014,30(5):491－496.

[5] Benjamini I, Peres Y. Markov chains indexed by trees[J]. Annals of Probability,1994,22(1):219－243.

[6] 范振耀,金少华,边静. 树指标集马氏链的常返性[J]. 数学的实践与认识,2009,39(18):221－223.

(责任编校：夏玉玲)

(上接第 2 页)成的。这说明映射的非完整性不仅能表现在空间挠率的变化上，而且也能表现在空间曲率的变化上，这从一个侧面体现出非完整问题的复杂性。同时也说明，和挠率一样，位形空间曲率的变化也能反过来反映出两个位形空间之间映射的非完整性。

参考文献：

[1] 梅凤翔. 分析力学：上卷[M]. 北京：北京理工大学出版社，2013:12.

[2] Kleinert H, Shabanov S V. Space with torsion from embedding, and the special role of autoparallel trajectories[J] Phys Lett B,1998,428:315－321.

[3] Guo Y X, Wang Y, Chee G Y, et al. Nonholonomic versus vakonomic dynamics on a Riemann-Cartan manifold[J] J Math Phys,2005,46(5):062902.

[4] 王勇，郭永新. Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理[J]. 物理学报，2005，54(12)：5517－5520.

[5] 王勇，郭永新，吕群松，等. 非完整映射理论与刚体定点转动的几何描述[J]. 物理学报，2009，58(8)：5142－5149.

[6] Guo Yongxin,Liu Chang,Wang Yong, et al. Nonholonomic mapping theory of autoparallel motions in riemann-cartan space[J]. Science China(Physics,Mechanics & Astronomy),2010(9):1707－1715.

[7] 余扬振，冯承天. 物理学中的几何方法[M]. 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1998:487.

(责任编校：夏玉玲)