第 28 卷第 6 期
2015 年 11 月
唐山学院学报
Journal of Tangshan College
Vol. 28 No. 6
Nov. 2015

离散鞅论在多期期权定价中的推广

周一美

(渤海大学 数理学院，辽宁 锦州 121013)

摘要：研究了离散鞅论在多期期权定价下的推广。通过假设前提，确定了多期期权模型的结构，分析其欧式期权的性质，并运用反证法和单期模型的相关理论得出了多期期权下的关系式。

关键词：离散鞅论；期权定价；多期期权定价；欧式期权

中图分类号：O211.9　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2015)06－0007－02

DOI：10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.06.003

Application of Discrete-time Martingale to Multi-period Option Pricing

ZHOU Yi-mei

(College of Mathematics and Physics, Bohai University, Jinzhou 121013, China)

Abstract: In this paper, the authors study the promotion of discrete-time martingale theory in multi-period option pricing, determine the structure of the multi-stage option model by assuming the premise, analyze the nature of the European option, and obtain the relationship under multi-period option with reductio ad absurdum and the single-phase model.

Key Words: discrete-time martingale; option pricing; multi-period option pricing; European option

近年来，期权模型的应用研究受到国内广大学者的关注，杨建奇、肖庆宪对期权定价的方法和模型进行了综合描述[1]，付蕾对鞅理论及其在某些金融模型中的应用进行了相关研究[2]。在国外，Black F, Scholes M 等将 B-S 模型作为期权定价中的经典方法，对其假设的局限性和模型本身参数估计中所存在的偏差做出了反思[3-4]。金融学家们在此基础上建立了资产定价基本定理[5]。本文将对单期期权模型进行推广，以得到离散鞅论在多期模型下的关系式。

1　期权定价的多期模型

N 期(多期)模型的假设前提：金融市场是无套利市场，N 期股票收益是独立分布的。选择 $X=(0,1)^N$ 作为 N 期模型的适应样本空间，样本点为 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N)$，$x\in X$。$n\leqslant N$ 时，S_n 是期权到期时刻为 n 时的股票价格，并由 $x^*=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N)$ 决定。

显然 $S_n(x)\equiv S_n(x^*)$，则股票价格变化为：

$$S_n(x^*)=\begin{cases}aS_{n-1}(x_{n-1}^*,1),\text{概率为 } p\\ bS_{n-1}(x_{n-1}^*,0),\text{概率为 } 1-p\end{cases},$$

a,b,p 的定义同单期模型，且满足 $0<1+r<b$。

定义空间 X 上的概率测度 P 为：

$$P\{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N)\}=p^{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}(1-p)^{N-\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}。$$

设不同的期权到期时刻为 $0,1,2,\cdots,N$，令 $V_1,V_2,V_3,\cdots,V_N$ 为股票价格是 $S_1,S_2,S_3,\cdots,S_N$，且期权的执行价格为 K 时的欧式期权价格，则有

$$V_N=\begin{cases}\max(a^{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}b^{N-\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}S_0-K,0),\text{看涨期权}\\ \max(K-a^{\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}b^{N-\sum\limits_{i=1}^{N}x_i}S_0,0),\text{看跌期权}\end{cases}。$$

2　将单期模型中的方法引入到多期模型中

设一个 N 期模型的资产组合系数为 $\{(\alpha_n,\beta_n,\gamma_n),n=0,1,2,\cdots,N\}$，$\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$ 是定义在 $X=\{0,1\}^N$ 上的随机变量，且 $x=(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_N)$。

引理 1　设金融市场无套利，欧式期权到期时刻为 n，则存在组合系数 $(\alpha_{n-1}(x_{n-1}^*),\beta_{n-1}(x_{n-1}^*),\gamma_{n-1}(x_{n-1}^*))$，且 $\alpha_{n-1}(x_{n-1}^*)=0$，满足

$$\beta_{n-1}(x_{n-1}^*)S_n(x_{n-1}^*,x_n)+\gamma_{n-1}(x_{n-1}^*)S_n(x_{n-1}^*,x_n)=V_n(x_{n-1}^*,x_n),x_n\in\{0,1\},$$

其中：

$$\beta_{n-1}=\frac{V_n(x_{n-1}^*,0)-V_n(x_{n-1}^*,1)}{(a-b)S_{n-1}(x_{n-1}^*)},$$

收稿日期：2015－07－09
基金项目：国家自然科学基金项目(11371030)
作者简介：周一美(1990－)，女，辽宁兴城市，硕士研究生，主要从事应用概率统计研究。

$$r_{n-1}=\frac{1}{(1+r)S_{n-1}(x_{n-1}^{*})}\left[\frac{aV_n(x_{n-1}^{*},1)-bV_n(x_{n-1}^{*},0)}{a-b}\right]。$$

定理 1 在期权到期时刻为 1,2,3,…,N 时,欧式期权价值分别为 $V_1,V_2,V_3,\cdots,V_N$,则有递推关系式:

$$V_{n-1}(x_{n-1}^{*})=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_n(x_{n-1}^{*},0)+(1-\tilde{p})V_n(x_{n-1}^{*},1)], \quad (1)$$

其中 $\tilde{p}=\frac{1+r-b}{a-b}$,$1\leqslant n\leqslant N$。

证明 与单期模型中的证明方法相同,首先用反证法证明,假设 $\varepsilon=V_{n-1}-(\beta_{n-1}S_{n-1}+\gamma_{n-1}B_{n-1})>0$。

考虑组合系数$(-1,\beta_{n-1},\gamma_{n-1}+\frac{\varepsilon}{B_{n-1}})$,在 $t=n-1$ 时刻的财富过程是:

$$W_{n-1}=-V_{n-1}+\beta_{n-1}S_{n-1}+(\gamma_{n-1}+\frac{\varepsilon}{B_{n-1}})B_{n-1}=0。\quad (2)$$

在 $t=n$ 时刻的财富过程是:

$$W_n=-V_n+\beta_{n-1}S_n+(\gamma_{n-1}+\frac{\varepsilon}{B_{n-1}})B_n=$$

$$-V_n+\beta_{n-1}S_n+\gamma_{n-1}B_n+\varepsilon\frac{B_n}{B_{n-1}}。\quad (3)$$

将 $V_n=g$ 代入式(3)中得:

$$-V_n+\beta_{n-1}S_n+\gamma_{n-1}B_n=0,W_n(x)=\varepsilon\frac{B_n}{B_{n-1}}。$$

由于对所有的 $x\in X$,B_n,B_{n-1} 均为正,故 $W_n(x)>0$,与无套利前提矛盾。

令组合数$(1,-\beta_{n-1},-\gamma_{n-1}-\frac{\varepsilon}{B_{n-1}})$,利用相同的方法可证 $\varepsilon=V_{n-1}-(\beta_{n-1}S_{n-1}+\gamma_{n-1}B_{n-1})<0$ 不成立,

故 $V_{n-1}-(\beta_{n-1}S_{n-1}+\gamma_{n-1}B_{n-1})=0$。

将 β_{n-1},γ_{n-1} 代入后得到期权的价格递推关系式:

$$V_{n-1}(x_{n-1}^{*})=\frac{1}{1+r}[\tilde{p}V_n(x_{n-1}^{*},0)+(1-\tilde{p})V_n(x_{n-1}^{*},1)],$$

其中

$$V_N=\begin{cases}\max(a^{\sum_{i=1}^{N}x_i}b^{N-\sum_{i=1}^{N}x_i}S_0-K,0),看涨期权\\ \max(K-a^{\sum_{i=1}^{N}x_i}b^{N-\sum_{i=1}^{N}x_i}S_0,0),看跌期权\end{cases}。$$

N 期模型的等价概率测度 $\tilde{p}$ 定义为:

$$\tilde{p}\{(x,x_2,x_3,\cdots,x_N)\}=\tilde{p}^{\sum_{i=1}^{N}x_i}(1-\tilde{p})^{N-\sum_{i=1}^{N}x_i}。\quad (4)$$

设期权到期时刻 $t=N$ 的随机收益为 g,$\tilde{E}$ 为在价格概率 $\tilde{p}$ 下的条件期望,期权执行价格为 K,由 $1\leqslant n\leqslant N$,

此时 $V_{i-1}=\tilde{E}\left(\frac{1}{(1+r)}V_i\mid(S_{i-1},B_{i-1})\right)$,

$$V_{i-2}=\tilde{E}\left(\frac{1}{(1+r)}V_{i-1}\mid(S_{i-2},B_{i-2})\right)=$$

$$\tilde{E}\left(\frac{1}{(1+r)}\tilde{E}\left(\frac{1}{(1+r)}V_i\mid(S_{i-1},B_{i-1})\right)\mid(S_{i-2},B_{i-2})\right)=$$

$$\tilde{E}\left(\frac{1}{(1+r)^2}V_i\mid(S_{i-2},B_{i-2})\right)。$$

以此类推分别求出 $V_{i-3},V_{i-4},\cdots,V_0$。

故期权的初始价格满足:

$$V_0=\frac{1}{(1+r)^N}\tilde{E}(g\mid(S_0,B_0)),$$

$$V_0=\begin{cases}\frac{1}{(1+r)^N}\sum_{1}^{N}\binom{N}{n}\tilde{p}^n(1-\tilde{p})^{N-n}\max(a^nb^{N-n}S_0-K,0),看涨期权\\ \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{1}^{N}\binom{N}{n}\tilde{p}^n(1-\tilde{p})^{N-n}\max(K-a^nb^{N-n}S_0,0),看跌期权\end{cases}。$$

参考文献:

[1] 杨建奇,肖庆宪.期权定价的方法和模型综述[J].商业时代,2008(16):65-81.

[2] 付蕾.鞅理论及其在某些金融模型中的应用[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2012.

[3] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy,1973,81:637-659.

[4] Harrison J M, Kreps D M. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets[J]. Journal of Economic Theory,1979,20:381-408.

[5] 邵宇.微观金融学及其数学基础[M].北京:清华大学出版社有限公司,2003:240-243.

(责任编校:夏玉玲)