

非连通图 $D_{3,4} \cup G$ 的优美标号

吴跃生

(华东交通大学 理学院, 南昌 330013)

摘要: 讨论了非连通图 $D_{3,4} \cup G$ 的优美性, 给出了非连通图 $D_{3,4} \cup G$ 是优美图的几个充分条件。

关键词: 优美图; 交错图; 非连通图; 优美标号

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-349X(2015)05-0003-04

DOI: 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.06.002

The Graceful Labeling of the Unconnected Graph $D_{3,4} \cup G$

WU Yue-sheng

(School of Science, East China Jiaotong University, nanchang 330013, China)

Abstract: The author of this paper discusses the gracefulfulness of the unconnected graph $D_{3,4} \cup G$ and put forward some sufficient conditions for the gracefulfulness of the unconnected graph.

Key Words: graceful graph; interlaced image; unconnected graph; graceful labeling

1 引言与概念

记号 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集, m 和 n 均为非负整数, 且满足 $0 \leq m < n$, 记号 $[m, n]$ 表示整数集合 $\{m, m+1, \dots, n\}$, 记号 G_{k+m} 表示图 G 是特征为 k 且缺 $k+m$ 标号值的交错图。本文所讨论的图均为无向简单图, 未说明的符号及术语均同参考文献[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题[1-14]。

定义 1^[1] 对于一个图 $G=(V, E)$, 称 G 是优美图, θ 为 G 的一组优美标号是指: 如果存在一个单射 $\theta: V(G) \rightarrow [0, |E(G)|]$ 使得对所有边 $e=uv \in E(G)$, 由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的 $E(G) \rightarrow [1, |E(G)|]$ 是一个双射。

定义 2^[2] 设 θ 是图 G 的优美标号, $V(G)=X \cup Y$, 且 $X \cap Y = \emptyset$, 如果 $\max_{v \in X} \{\theta(v)\} = k < \min_{v \in Y} \{\theta(v)\}$, 则称 θ 是 G 的交错标号。称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。称 $\max_{v \in X} \{\theta(v)\} = k$ 为交错图 G 关于交错标号 θ 的特征。

把任意 m 个圈 C_n 的恰有一个公共点所组成的图记作 $D_{m,n}$ ^[1]。

文[13]和[14]分别研究了非连通图 $D_{2,6} \cup G$ 和非连通图 $D_{2,8} \cup G$ 的优美标号。

$D_{3,4}$ 存在特征为 3, 且缺 6, 8 和 11 标号值的交错标号, 如图 1 所示。为方便起见, 把如图 1 所示的标号记为: (1; 0, 12, 10; 9, 2, 7; 5, 3, 4)

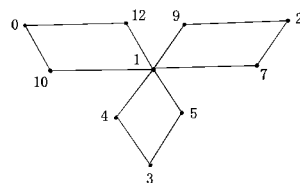


图 1 图 $D_{3,4}$ 的交错标号

本文将讨论非连通图 $D_{3,4} \cup G$ 的优美性。

2 主要结论及其证明

定理 1 当 $2 \leq k+2 \leq |E(G_{k+2})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 存在特征为 $k+5$, 且缺 $k+1, k+8$ 和 $k+10$ 标号值的交错标号。

证明 设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+2} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+2} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+2})| = q$ 。

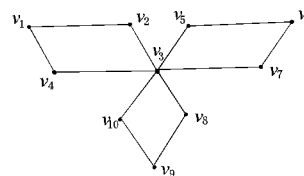


图 2 图 $D_{3,4}$

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的顶点标号 θ 为:

$\theta(v_1) = k+2, \theta(v_2) = k+14, \theta(v_3) = k+3, \theta(v_4) = k+$

$$12, \theta(v_5) = k+11, \theta(v_6) = k+4, \theta(v_7) = k+9, \theta(v_8) = k+7, \\ \theta(v_9) = k+5, \theta(v_{10}) = k+6, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

下面证明 θ 是非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的优美标号。

(1) $\theta: X \rightarrow [0, k]$ 是单射(或双射); $\theta: Y \rightarrow [k+13, q+12] - \{k+14\}$ 是单射;

$\theta: V(D_{3,4}) \rightarrow [k+2, k+12] \cup \{k+14\} - \{k+8, k+10\}$ 是双射;

容易验证: $\theta: V(D_{3,4} \cup G_{k+2}) \rightarrow [0, q+12] - \{k+8, k+10\}$ 是单射。

$$(2) \theta'(v_1 v_2) = |\theta(v_1) - \theta(v_2)| = 12, \theta'(v_2 v_3) = 11, \\ \theta'(v_4 v_3) = 9, \theta'(v_4 v_1) = 10, \theta'(v_5 v_3) = 8, \theta'(v_5 v_5) = 7, \\ \theta'(v_6 v_7) = 5, \theta'(v_7 v_3) = 6, \theta'(v_8 v_3) = 4, \theta'(v_8 v_5) = 2, \\ \theta'(v_{10} v_9) = 1, \theta'(v_{10} v_5) = 3.$$

$\theta': E(D_{3,4}) \rightarrow [1, 12]$ 是双射;

$\theta': E(G_{k+2}) \rightarrow [13, q+12]$ 是双射。

$\theta': E(D_{3,4} \cup G_{k+2}) \rightarrow [1, q+12]$ 是一一对应的。

由(1)和(2)可知 θ 就是非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的缺 $k+1$, $k+8$ 和 $k+10$ 标号值的优美标号。

令 $X_1 = X \cup \{v_1, v_3, v_5\}$, $Y_1 = Y \cup \{v_2, v_4, v_5, v_7, v_8, v_{10}\}$, 则有 $\max_{v \in X_1} \theta(v) = \theta(v_5) = k+5 < \min_{v \in Y_1} \theta(v) = \theta(v_{10}) = k+6$ 。

所以, θ 就是非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的特征, 为 $k+5$, 且缺 $k+1, k+8$ 和 $k+10$ 标号值的交错标号。证毕。

下面的定理只给出标号, 证明过程可仿定理 1。

定理 2 当 $2 \leq k+2 \leq |E(G_{k+2})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 存在特征为 $k+4$, 且缺 $k+7, k+10$ 和 $k+12$ 标号值的交错标号。

证明 设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+2} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+2} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+2})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+2, \theta(v_2) = k+11, \theta(v_3) = k+2, \theta(v_4) = k+9, \\ \theta(v_5) = k+14, \theta(v_6) = k+3, \theta(v_7) = k+8, \theta(v_8) = k+6, \\ \theta(v_9) = k+4, \theta(v_{10}) = k+5, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 3 当 $3 \leq k+3 \leq |E(G_{k+3})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+3}$ 存在特征为 $k+5$, 且缺 $k+1, k+8$ 和 $k+11$ 标号值的交错标号。

证明 设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+3} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+3} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+3})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+3}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+2, \theta(v_2) = k+12, \theta(v_3) = k+3, \theta(v_4) = k+10, \theta(v_5) = k+15, \theta(v_6) = k+4, \theta(v_7) = k+9, \theta(v_8) = k+7,$$

$$\theta(v_9) = k+5, \theta(v_{10}) = k+6, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 4 当 $10 \leq k+10 \leq |E(G_{k+10})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 存在缺 $k+6, k+8$ 和 $k+11$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+10} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+10} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+10})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+22, \theta(v_2) = k+12, \theta(v_3) = k+1, \theta(v_4) = k+10, \theta(v_5) = k+9, \theta(v_6) = k+2, \theta(v_7) = k+7, \theta(v_8) = k+5, \\ \theta(v_9) = k+3, \theta(v_{10}) = k+4, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 5 当 $10 \leq k+10 \leq |E(G_{k+10})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 存在缺 $k+3, k+5$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+10} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+10} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+10})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+11, \theta(v_2) = k+22, \theta(v_3) = k+10, \theta(v_4) = k+1, \theta(v_5) = k+2, \theta(v_6) = k+9, \theta(v_7) = k+4, \theta(v_8) = k+6, \\ \theta(v_9) = k+8, \theta(v_{10}) = k+7, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 6 当 $11 \leq k+11 \leq |E(G_{k+11})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+11}$ 存在缺 $k+1, k+4$ 和 $k+6$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+11} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+11} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+11})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+11}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+12, \theta(v_2) = k+23, \theta(v_3) = k+11, \theta(v_4) = k+2, \theta(v_5) = k+3, \theta(v_6) = k+10, \theta(v_7) = k+5, \theta(v_8) = k+7, \\ \theta(v_9) = k+9, \theta(v_{10}) = k+8, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 7 当 $10 \leq k+10 \leq |E(G_{k+10})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 存在缺 $k+1, k+3$ 和 $k+6$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+10} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+10} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+10})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(v_1) = k+12, \theta(v_2) = k+2, \theta(v_3) = k+11, \theta(v_4) = k+4, \theta(v_5) = k+22, \theta(v_6) = k+10, \theta(v_7) = k+5, \theta(v_8) = k+7, \\ \theta(v_9) = k+9, \theta(v_{10}) = k+8, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases}$$

定理 8 当 $9 \leq k+9 \leq |E(G_{k+9})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+9}$ 存在缺 $k+2, k+5$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。

证明 设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+9} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+9} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+9})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+9}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\begin{aligned} \theta(v_1) &= k+11, \theta(v_2) = k+1, \theta(v_3) = k+10, \theta(v_4) = k+3, \theta(v_5) = k+21, \theta(v_6) = k+9, \theta(v_7) = k+4, \theta(v_8) = k+6, \\ \theta(v_9) &= k+8, \theta(v_{10}) = k+7, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

定理 9 当 $2 \leq k+2 \leq |E(G_{k+2})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 存在缺 $k+2, k+5$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+2} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+2} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+2})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+2}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\begin{aligned} \theta(v_1) &= k+9, \theta(v_2) = k+4, \theta(v_3) = k+14, \theta(v_4) = k+2, \theta(v_5) = k+6, \theta(v_6) = k+5, \theta(v_7) = k+8, \theta(v_8) = k+10, \\ \theta(v_9) &= k+1, \theta(v_{10}) = k+12, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

定理 10 当 $11 \leq k+11 \leq |E(G_{k+11})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+11}$ 存在缺 $k+1, k+5$ 和 $k+9$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+11} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+11} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+11})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+11}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\begin{aligned} \theta(v_1) &= k+3, \theta(v_2) = k+8, \theta(v_3) = k+12, \theta(v_4) = k+10, \theta(v_5) = k+6, \theta(v_6) = k+7, \theta(v_7) = k+4, \theta(v_8) = k+2, \\ \theta(v_9) &= k+11, \theta(v_{10}) = k+23, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

定理 11 当 $10 \leq k+10 \leq |E(G_{k+10})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 存在缺 $k+4, k+8$ 和 $k+12$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+10} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+10} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+10})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+10}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\begin{aligned} \theta(v_1) &= k+2, \theta(v_2) = k+7, \theta(v_3) = k+11, \theta(v_4) = k+9, \theta(v_5) = k+5, \theta(v_6) = k+6, \theta(v_7) = k+3, \theta(v_8) = k+1, \\ \theta(v_9) &= k+10, \theta(v_{10}) = k+22, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

定理 12 当 $4 \leq k+4 \leq |E(G_{k+4})|$ 时, 非连通图 $D_{3,4} \cup G_{k+4}$ 存在缺 $k+2, k+6$ 和 $k+9$ 标号值的优美标号。

设 $D_{3,4}$ 如图 2 所示, 设 X, Y 是图 G_{k+4} 的一个二分化, θ_1 是图 G_{k+4} 的交错标号, 且 $\max_{v \in X} \theta_1(v) = k < \min_{v \in Y} \theta_1(v) = k+1, |E(G_{k+4})| = q$ 。

定义 $D_{3,4} \cup G_{k+4}$ 的顶点标号 θ 为:

$$\begin{aligned} \theta(v_1) &= k+4, \theta(v_2) = k+16, \theta(v_3) = k+12, \theta(v_4) = k+10, \theta(v_5) = k+7, \theta(v_6) = k+8, \theta(v_7) = k+5, \theta(v_8) = k+3, \\ \theta(v_9) &= k+11, \theta(v_{10}) = k+1, \theta(v) = \begin{cases} \theta_1(v), v \in X \\ \theta_1(v) + 12, v \in Y^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

引理 1^[1] 对任意正整数 n , 设 C_{4n} 是有 $4n$ 个顶点的圈, 则 C_{4n} 存在特征为 $2n-1$, 且缺 $3n$ 的交错标号。

注意到: $3n = (2n-1) + n + 1$, 由定理 1 和引理 1 有如下的推理。

推论 1 非连通图 $D_{3,4} \cup C_4$ 存在特征为 6, 且缺 2, 9 和 11 标号值的交错标号。

非连通图的存在特征为 6, 且缺 2, 9 和 11 标号值的交错标号为:

$$D_{3,4} : (4; 3, 15, 13; 12, 5, 10; 8, 6, 7); C_4 : 0, 16, 1, 14。$$

由定理 2 和引理 1 有如下的推理。

推论 2 非连通图 $D_{3,4} \cup C_4$ 存在特征为 5, 且缺 8, 11 和 13 标号值的交错标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_4$ 的特征为 5, 且缺 8, 11 和 13 标号值的交错标号为

$$D_{3,4} : (3; 2, 12, 10; 15, 4, 9; 7, 5, 6); C_4 : 0, 16, 1, 14。$$

由定理 3 和引理 1 有如下的推理。

推论 3 非连通图 $D_{3,4} \cup C_8$ 存在特征为 8, 且缺 4, 11 和 14 标号值的交错标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_8$ 的特征为 8, 且缺 4, 11 和 14 标号值的交错标号为:

$$D_{3,4} : (6; 5, 15, 13; 18, 7, 12; 10, 8, 9); C_8 : 0, 20, 1, 19, 2, 17, 3, 16。$$

由定理 4 和引理 1 有如下的推理。

推论 4 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 存在缺 23, 25 和 28 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 的缺 23, 25 和 28 标号值的优美标号为:

$$D_{3,4} : (18; 39, 29, 27; 26, 19, 24; 22, 20, 21);$$

$$C_{36} : 0, 48, 1, 47, 2, 46, 3, 45, 4, 44, 5, 43, 6, 42, 7, 41, 8, 40, 9, 38, 10, 37, 11, 36, 12, 35, 13, 34, 14, 33, 15, 32, 16, 31, 17, 30。$$

由定理 5 和引理 1 有如下的推理。

推论 5 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 存在缺 20, 22 和 29 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 的缺 20, 22 和 29 标号值的优美标号为:

$$D_{3,4} : (27; 28, 18, 39; 19, 26, 21; 23, 25, 24);$$

$$C_{36} : 0, 48, 1, 47, 2, 46, 3, 45, 4, 44, 5, 43, 6, 42, 7, 41, 8, 40, 9, 38, 10, 37, 11, 36, 12, 35, 13, 34, 14, 33, 15, 32, 16, 31, 17, 30。$$

由定理 6 和引理 1 有如下的推理。

推论 6 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{40}$ 存在缺 20, 23 和 25 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{40}$ 的缺 20, 23 和 25 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (30; 31, 21, 42; 22, 29, 24; 26, 28, 27);$

$C_{40} : 0, 52, 1, 51, 2, 50, 3, 49, 4, 48, 5, 47, 6, 46, 7, 45, 8, 44, 9, 43, 10, 41, 11, 40, 12, 39, 13, 38, 14, 37, 15, 36, 16, 35, 17, 34, 18, 33, 19, 32.$

由定理 7 和引理 1 有如下的推理。

推论 7 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 存在缺 18, 20 和 23 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 的缺 18, 20 和 23 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (28; 29, 19, 21; 39, 27, 22; 24, 26, 25);$

$C_{36} : 0, 48, 1, 47, 2, 46, 3, 45, 4, 44, 5, 43, 6, 42, 7, 41, 8, 40, 9, 38, 10, 37, 11, 36, 12, 35, 13, 34, 14, 33, 15, 32, 16, 31, 17, 30.$

由定理 8 和引理 1 有如下的推理。

推论 8 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{32}$ 存在缺 17, 20 和 27 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{32}$ 的缺 17, 20 和 27 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (25; 26, 16, 18; 36, 24, 19; 21, 23, 22);$

$C_{32} : 0, 44, 1, 43, 2, 42, 3, 41, 4, 40, 5, 39, 6, 38, 7, 37, 8, 35, 9, 34, 10, 33, 11, 32, 12, 31, 13, 30, 14, 29, 15, 28.$

由定理 9 和引理 1 有如下的推理。

推论 9 非连通图 $D_{3,4} \cup C_4$ 存在缺 4, 8 和 12 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_4$ 的缺 4, 8 和 12 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (15; 10, 5, 3; 7, 6, 9; 11, 2, 13); C_4 : 0, 16, 1, 14.$

由定理 10 和引理 1 有如下的推理。

推论 10 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{40}$ 存在缺 20, 24 和 28 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{40}$ 的缺 20, 24 和 28 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (31; 22, 27, 29; 25, 26, 23; 21, 30, 42);$

$C_{40} : 0, 52, 1, 51, 2, 50, 3, 49, 4, 48, 5, 47, 6, 46, 7, 45, 8, 44, 9, 43, 10, 41, 11, 40, 12, 39, 13, 38, 14, 37, 15, 36, 16, 35, 17, 34, 18, 33, 19, 32.$

由定理 11 和引理 1 有如下的推理。

推论 11 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 存在缺 21, 25 和 29 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 的缺 21, 25 和 29 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (28; 19, 24, 26; 22, 23, 20; 18, 27, 39);$

$C_{36} : 0, 48, 1, 47, 2, 46, 3, 45, 4, 44, 5, 43, 6, 42, 7, 41, 8, 40, 9, 38, 10, 37, 11, 36, 12, 35, 13, 34, 14, 33, 15, 32, 16, 31, 17, 30.$

推论 12 非连通图 $D_{3,4} \cup C_{12}$ 存在缺 7, 11 和 14 标号值的优美标号。

非连通图 $D_{3,4} \cup C_{36}$ 的缺 7, 11 和 14 标号值的优美标号为:

$D_{3,4} : (17; 9, 21, 15; 12, 13, 10; 8, 16, 6);$

$C_{12} : 0, 24, 1, 23, 2, 22, 3, 20, 4, 19, 5, 18.$

注意到: 定理 1、定理 3 中 $k+8=(k+5)+3$, 定理 2 中 $k+7=(k+4)+3$, 又 $D_{3,4}$ 存在特征为 3, 且缺 6, 8 和 11 标号值的交错标号, $6=3+3$, 连续应用定理 3, 有如下的推理。

推论 13 非连通图 $nD_{3,4}$ 是交错图。

例 非连通图 $3D_{3,4}$ 的特征为 13 交错标号为:

$D_{3,4} : (1; 0, 36, 34; 33, 2, 31; 29, 3, 28);$

$D_{3,4} : (6; 5, 27, 25; 30, 7, 24; 22, 8, 21);$

$D_{3,4} : (11; 10, 20, 18; 23, 12, 17; 15, 13, 14).$

参考文献:

- [1] 马克杰. 优美图[M]. 北京: 北京大学出版社, 1991: 1-2.
- [2] 杨显文. 关于 C_{4m} 蛇的优美性[J]. 工程数学学报, 1995, 12(4): 108-112.
- [3] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 非连通图 $C_{4m} \cup G$ 的优美标号[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2015, 32(2): 79-83.
- [4] 吴跃生, 徐保根. 两类非连通图 $(P_2 \vee \bar{K}_n)(0, 0, r_1, 0, \dots, 0, r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \bar{K}_n)(r_1+a, r_2, 0, \dots, 0) \cup G_r$ 的优美性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(5): 63-66.
- [5] 吴跃生, 王广富, 徐保根. 关于 $C_{4h+1} \odot K_1$ 的 $(Gr_1, Gr_2, \dots, Gr_{4h+1}, Gr_{4h+2})$ 一冠的优美性[J]. 山东大学学报: 理学版, 2013, 48(4): 25-27.
- [6] 吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(Gr_1, Gr_2, \dots, Gr_{4h+3})$ 一冠的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2013, 34(4): 4-9.
- [7] Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2013, 16(DS6): 1-308.
- [8] 吴跃生. 非连通图 $G_{+e} \cup H_{k-1}$ 的优美性[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2014, 35(2): 3-5.
- [9] 吴跃生. 非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美标号[J]. 唐山学院学报, 2014, 27(3): 12-14.
- [10] 吴跃生. 再探非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美标号[J]. 唐山学院学报, 2014, 27(6): 1-4.
- [11] 吴跃生. 非连通图 $2C_{4m} \cup G$ 是优美图的五个充分条件[J]. 唐山学院学报, 2015, 28(3): 4-7.
- [12] 吴跃生. 三探非连通图 $C_{4m-1} \cup G$ 的优美标号[J]. 吉首大学学报: 自然科学版, 2015, 36(4): 5-8.
- [13] 吴跃生. 非连通图 $D_{2,6} \cup G$ 的优美标号[J]. 海南大学学报: 自然科学版, 2014, 32(1): 32-34.
- [14] 吴跃生. 非连通图 $D_{2,8} \cup G$ 的优美标号[J]. 西华师范大学学报: 自然科学版, 2014, 35(1): 4-6.

(责任编辑: 夏玉玲)