

一类具有二维捕食与被捕食关系的永久持续生存问题

祝占法

(陕西航空职业技术学院 文理学院, 陕西 汉中 723102)

摘要: 利用诱导控制理论研究了具有二维捕食与被捕食关系的种群动力学系统, 并对系统施加控制, 得到了系统永久持续生存的控制律及控制区域。

关键词: 捕食与被捕食; 诱导控制; 永久持续生存; 诱导控制区域

中图分类号: O152.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-349X(2015)03-0016-02

DOI: 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.03.006

On Permanence of Two-Dimensional Predator-Prey Relationship

ZHU Zhan-fa

(College of Arts and Science, Shaanxi Aviation Professional Technical Institute, Hanzhong China, 723102)

Abstract: In this paper, the induction control theory is applied to study the population dynamics system of two-dimensional predator and prey relationships, and the system is under control in order to obtain the control law and the control area for permanent survival.

Key Words: predator and prey; induction control; permanent survival; induction control area

1 问题的提出

Stanisla 在 1998 年出版的《Control of Indefinite Nonlinear Dynamic Systems: Induced Feedback》中, 用诱导控制理论研究了种群的永久持续生存问题, 其研究对象是不考虑种群密度制约下的捕食与被捕食系统^[1-2]:

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $\epsilon_1, \epsilon_2, r_1, r_2$ 均为正数, $N(N_1(t_0), N_2(t_0)) > 0$ 是系统的初始点, 这里假设捕食者仅以食饵为生, 且忽略密度制约的因素。

文献[3]对该系统给出了 4 种不同的诱导控制, 即

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) + u_{12} \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) - u_{22} \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) - u_{31} \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) - u_{41} \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) - u_{42} \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases},$$

得到了相应的控制区域和控制函数。在其他文献中也有此方面的研究^[4-7]。本文将对其进行补充, 给系统(1)施加另外的控制 u_1, u_2 , 得到受控系统

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(\epsilon_1 - r_{12}N_2) + u_1 \\ \dot{N}_2 = N_2(-\epsilon_2 + r_{21}N_1) + u_2 \\ N_1(t_0) = N_{10} > 0 \\ N_2(t_0) = N_{20} > 0 \end{cases}. \quad (2)$$

收稿日期: 2014-11-19

作者简介: 祝占法(1984-), 男, 河南滑县人, 讲师, 硕士, 主要从事生物数学研究。

下面运用诱导控制理论使系统(2)达到永久持续生存。

2 问题的解决

对于系统(2),可以得出下面定理。

定理 1 对事先给定的数 $\sigma > 0$, 设

$$\Omega_\sigma = \{(N_1, N_2) \in R^+ \mid M_1 - \sigma \leq N_1 \leq M_1 + \sigma, M_2 - \sigma \leq N_2 \leq M_2 + \sigma\}, \quad (3)$$

其中 $M_1 - \sigma < \varepsilon_2 / r_{21}, M_2 - \sigma > \varepsilon_1 / r_{12}$ 。则控制

$$u_1 = K_1 N_1 N_2 \max\{0, \min\{1, \frac{\sigma - (N_1 - M_1)}{2\sigma}\}\},$$

$$u_2 = K_2 N_2 \max\{0, \min\{1, \frac{\sigma - (N_2 - M_2)}{2\sigma}\}\},$$

其中 $K_1 > r_{12}, K_2 > \varepsilon_2$, 使得系统(1)对区域 Ω_σ 是诱导能控的。

分析: 用诱导能控理论只需证明存在一个区域 $\Omega_\sigma = \{(N_1, N_2) \in R^+ \mid M_1 - \sigma \leq N_1 \leq M_1 + \sigma, M_2 - \sigma \leq N_2 \leq M_2 + \sigma\}$, 在有限的时间内, 使得系统(1)的解进入区域 Ω_σ 并保留在此区域内。

证明 对任意的 $u_1 > 0$, 如果 $\varepsilon_1 - r_{12} N_2 > 0$, 那么 $\dot{N}_1 > 0$, 对任意的 $u_2 > 0$, 如果 $-\varepsilon_2 + r_{21} N_1 > 0$, 那么 $\dot{N}_2 > 0$ 。

考虑下面控制

$$u_1 = K_1 N_1 N_2 \max\{0, \min\{1, \frac{\sigma - (N_1 - M_1)}{2\sigma}\}\},$$

$$u_2 = K_2 N_2 \max\{0, \min\{1, \frac{\sigma - (N_2 - M_2)}{2\sigma}\}\},$$

其中 $K_1 > r_{12}, K_2 > \varepsilon_2$, 设

$$B_1 = \{(N_1, N_2) \in R^+ \mid \|N_1 - M_1\| \leq \sigma, N_2 > 0\},$$

$$B_2 = \{(N_1, N_2) \in R^+ \mid \|N_2 - M_2\| \leq \sigma, N_1 > 0\},$$

$$l_1 : N_1 = \frac{\varepsilon_1}{r_{21}}, l_2 : N_2 = \frac{\varepsilon_1}{r_{12}},$$

带 B_1 和 B_2 相交的部分 Ω_σ (两组虚线围成的区域) 如图 1 所示。从图 1 可以看出, 第一象限被带 B_1 和 B_2 分成 4 部分。按逆时针记为 I, II, III, IV。

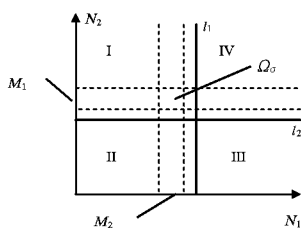


图 1 被 B_1, B_2 分割的区域

在部分 I 中, 有 $u_1 = k_1 N_1 N_2, \dot{N}_1 = N_1 \varepsilon_1 - r_{12} N_1 N_2 + k_1 N_1 N_2 > 0, u_2 = 0, \dot{N}_2 = N_2 (-\varepsilon_2 + r_{21} N_1) < 0$ 。

在部分 II 中, 有 $u_1 = k_1 N_1 N_2, \dot{N}_1 = N_1 \varepsilon_1 - r_{12} N_1 N_2 + k_1 N_1 N_2 > 0, u_2 = k_2 N_2, \dot{N}_2 > r_{21} N_1 N_2 > 0$ 。

在部分 III 中, 有

$$u_1 = 0, \dot{N}_1 = \begin{cases} N_1 (\varepsilon_1 - r_{12} N_2) > 0 & \text{otherwise} \\ N_1 (\varepsilon_1 - r_{12} N_2) < 0 & \text{above of } l_2 \end{cases};$$

$$u_2 = k_2 N_2, \dot{N}_2 > r_{21} N_1 N_2 > 0。$$

在部分 IV 中, 有

$$u_1 = 0, \dot{N}_1 < 0;$$

$$u_2 = 0, \dot{N}_2 = \begin{cases} N_2 (-\varepsilon_1 + r_{21} N_2) < 0 & \text{otherwise} \\ N_2 (-\varepsilon_1 + r_{21} N_2) > 0 & \text{right of } l_1 \end{cases}。$$

下面讨论无论初始点 (N_{10}, N_{20}) 在哪个区域, 系统(1)的轨线最终进入区域 Ω_σ 。

2.1 对情况 1 的讨论

如果点 (N_{10}, N_{20}) 在部分 IV 中, $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 在满足 $N_1 > l_1, N_2 \geq M_2 + \sigma$ 的区域内, $N_1(t)$ 是减函数, $N_2(t)$ 是增函数, 而在部分 IV 的其他部分, $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 均为减函数, 因为在此区域中的直线 l_1 上, 无系统的平衡点并且此直线不是系统(1)解的切线, 所以在区域 IV 中直线 l_1 上的任意一线段都是系统(1)的不切线段。于是系统的轨线从右向左进入带 B_1 中。接下来, 可以用反证法证明 B_1 是系统(1)的不变集, 假设系统(1)的轨线穿过直线 $N_1 = M_1 + \sigma$ 进入区域 I, 则直线 $N_1 = M_1 + \sigma$ 上, 一定存在一点 (N_1^*, N_2^*) 使得 $\dot{N}_1^* < 0$ 。但在直线 $N_1 = M_1 + \sigma$ 上任意一点都有 $\dot{N}_1^* > 0$, 这就产生了矛盾。

2.2 对情况 2 的讨论

如果点 (N_{10}, N_{20}) 在部分 III 中, 同样, 我们可以证明系统(1)的轨线进入带 B_2 中, 且永久留在里面。

2.3 对情况 3 的讨论

如果点 (N_{10}, N_{20}) 在部分 II 中, 系统(1)的线会出现下面 3 种情况之一。一是系统的轨线经过 $l_2: \varepsilon_1 - r_{12} N_2 = 0$ 后进入 B 中; 二是系统的轨线经过 $N_1 = M_1 - \sigma$ 后进入带 B_1 中; 三是系统的轨线经带 B_1 进入区域 III 中, 接下来用情况 2 来处理。

2.4 对情况 4 的讨论

如果点 (N_{10}, N_{20}) 在部分 I 中, 系统(1)的轨线会出现下面两种情况之一。一是系统的轨线经过 $N_2 = M_2 + \sigma$ 进入带 B_2 ; 二是轨线经过 $N_1 = M_1 - \sigma$ 进入带 B_1 中。

无论哪种情况发生, 系统(1)的轨线最终都会进入区域 Ω_σ 。现在用反证法来证明这一结论。

假设系统的轨线从左边离开此区域, 则它一定存在一点 (N_{*1}, N_{*2}) , 满足 $\dot{N}_{*1} < 0$, 但在边界上的点有 $\dot{N}_{*1} > 0$, 这就产生了矛盾。同理, 可以证明其他的 3 种情况。定理得证。

图 2 展示了系统(2)的轨线行为, 从上面的定理可知: 系统(2)的轨线最终会进入到一个远离坐标轴的区域 Ω_σ , 进而有下面的推论。

推论 如果定理 1 的所有条件成立, 则系统(1)是永久持续生存的。

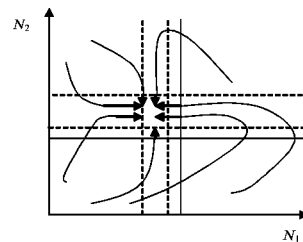


图 2 系统(2)的轨线行为

(下转第 20 页)

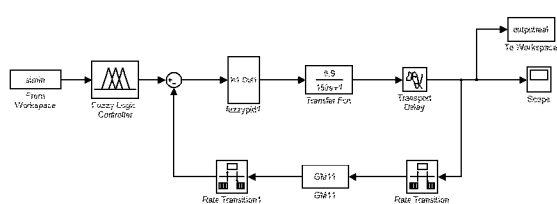


图 3 二次回水温度控制系统的仿真结构

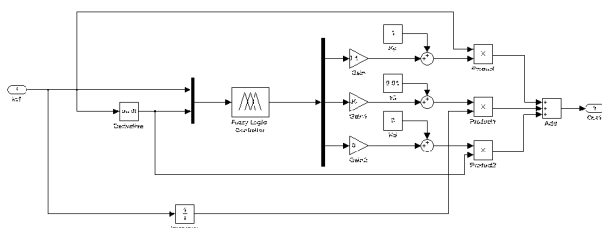


图 4 模糊自适应 PID 控制模块

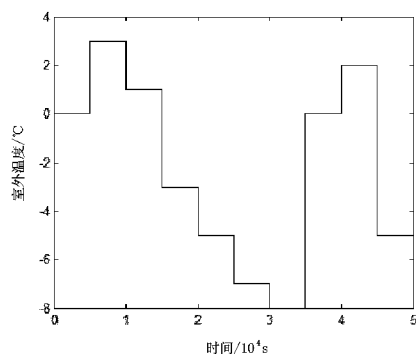


图 5 室外温度随时间的变化

由图 6 的仿真结果可以看出,无论是在室外温度变化缓慢或剧烈时,系统都能快速准确地调节至回水温度的期望值,且超调量小。调节曲线和设定曲线拟合程度很好,控制

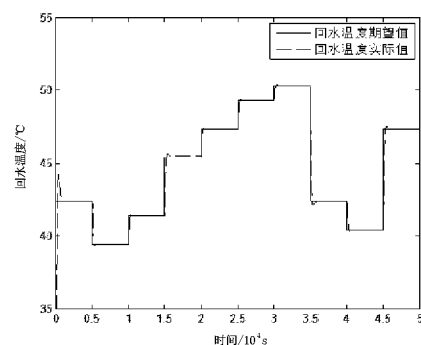


图 6 回水温度的实际值和期望值的比较

效果比较理想。这表明将灰色预测模糊自适应 PID 控制器应用在供热系统中,不仅解决了供热系统的大时滞问题,还可以使系统进行快速、准确的调节,保证了系统响应的稳定性和精确度。

参考文献:

- [1] 陶云奇,许江,李树春.改进的灰色马尔柯夫模型预测采煤工作面瓦斯涌出量[J].煤炭学报,2007,32(4):391-395.
- [2] 杨成晨,张九根.基于灰色预测模糊 PID 算法的空调房间温度控制[J].测控技术与仪器仪表,2012,38(4):57-58.
- [3] 罗伟.基于灰色预测的参数自校正构架电阻炉温度模糊控制系统[J].计算机测量与控制,2013,21(4):965-967.
- [4] 邓小龙,张建林,陆锦军,等.纺织空调系统的模糊 PID 控制研究及应用[J].仪器仪表学报,2008,20(3):763-767.

(责任编辑:夏玉玲)

(上接第 17 页)

3 结论

通过本文的讨论得出这样的结论:对于同一个种群的动力学系统,如果给出不同的诱导控制区域,那么就可以找出不同的控制函数。所以诱导控制理论在种群动力学系统中应用的关键是确定诱导控制区域,寻找控制函数。从控制函数的形式,可以证明控制函数是连续的,同时可知,在 Ω_0 已知的情况下,如果 u_1, u_2 被施加在系统上,则可使系统(1)的轨线进入 Ω_0 ,即 u_1, u_2 是针对 Ω_0 的诱导控制,这就是诱导控制的具体含义。

参考文献:

- [1] 陈兰荪.数学生态模型与研究方法[M].北京:科学出版社,1988:199-231.

- [2] 陆征一.数学生物学进展[M].北京:科学出版社,2006:131-171.
- [3] Thome M. Lecture notes in control and information science:231[M]. London:Springer Verlag,1998,140-153.
- [4] 祝占法.具二类功能反应的捕食与被捕食系统的诱导控制[J].温州大学学报,2009,30(4):30-37.
- [5] 赵立纯.具有阶段结构单种群系统的诱导控制[J].物理学报,2005,25(A):710-717.
- [6] 赵立纯.一个具有偏害关系的三种群模型的诱导控制[J].生物数学学报,2005,20(1):37-42.
- [7] Zhao L C. Induction control of a two-species competitive system[J]. Journal of Biomathematics,2003,18(3):263-268.

(责任编辑:夏玉玲)