关于丢番图方程 $|3^x-2^y|=p$

管训贵

（泰州学院 数理学院，江苏 泰州 225300）

摘要： 设 p 为奇素数，研究了丢番图方程 $|3^x-2^y|=p$ 表素数的问题，所用的方法仅限于取有限模。

关键词： 丢番图方程；素数；正整数解

中图分类号： O156　**文献标志码：** A　**文章编号：** 1672-349X(2015)03-0012-02

DOI： 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.03.004

On the Diophantine Equation $|3^x-2^y|=p$

GUAN Xun-gui

(School of Mathematics and Physics, Taizhou College, Taizhou 225300, China)

Abstract: The author of this paper demonstrates that the diophantine equation $|3^x-2^y|=p$ denotes a prime number when p is set as an odd prime and the method used is limited to finite mode.

Key Words: diophantine equation; prime; positive integer solution

1 引言及主要结论

丢番图方程 $|3^x-2^y|=p$（p 为奇素数）的求解问题，引起了不少数论爱好者的兴趣。文献[1]证明了 $p=41,43,53,59,67,71$ 时，此方程均无非负整数解。本文将给出一般性的结论，从而对文献[1]的结论进行推广，所用的知识仅限于整除与同余。

定理 1 设 p 为奇素数，对于丢番图方程

$$3^x-2^y=p, \tag{1}$$

（Ⅰ）若 $p\equiv5 \pmod{12}$，则方程(1)除去 $p=5, x=y=2$ 和 $p=17, x=4, y=6$ 外，无其他的正整数解；

（Ⅱ）若 $p\equiv7 \pmod 8$，则方程(1)除去 $p=3^a-2(2|a)$，$x=a, y=1$ 和 $p=3^a-4(2\nmid a)$，$x=a, y=2$ 外，无其他的正整数解，这里 $a\in\mathbf{N}^*$；

（Ⅲ）若 $p\equiv43,59 \pmod{240}$，则方程(1)无正整数解；

（Ⅳ）若 $p\equiv67 \pmod{504}$，则方程(1)无正整数解。

定理 2 设 p 为奇素数，对于丢番图方程

$$2^y-3^x=p, \tag{2}$$

（Ⅰ）若 $p\equiv1,3 \pmod 8$，则方程(2)无正整数解；

（Ⅱ）若 $p\equiv53 \pmod{80}$，则方程(2)无正整数解；

（Ⅲ）若 $p\equiv71 \pmod{1008}$，则方程(2)无正整数解。

2 关键性引理

引理 1[2] 方程 $x^y-(x-1)^z=1$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(1,s,t),(2,1,t),(r,1,1)$ 和 $(3,2,3)$，这里 r,s,t 为任意正整数，且 $r\geqslant3$。

引理 2[3] 设 a 关于模 m 的阶是 t，则 $a^r\equiv1 \pmod m$ 成立的充要条件是 $t|r$。

3 定理的证明

先证定理 1，设方程(1)有正整数解 (x,y)。

证明 （Ⅰ）对方程(1)模 3 得 $(-1)^y\equiv1 \pmod 3$，故 $2|y$，即 $y\geqslant2$。又模 4 得 $(-1)^x\equiv1 \pmod 4$，故 $2|x$。令 $x=2x_1, y=2y_1$（x_1, y_1 都是正整数），代入方程(1)得

$$(3^{x_1}+2^{y_1})(3^{x_1}-2^{y_1})=p。$$

因 p 为素数，故必有 $3^{x_1}+2^{y_1}=p$，且 $3^{x_1}-2^{y_1}=1$。根据引理 1，$x_1=y_1=1$ 及 $x_1=2, y_1=3$。此时 $p=5$ 或 17。

（Ⅱ）$y=1$ 时，令 $x=a$，则方程(1)有正整数解 $x=a, y=1$，此时 $p=3^a-2$。由 $3^a-2\equiv7 \pmod 8$ 知，$3^{a-2}\equiv1 \pmod 8$，因 3 对模 8 的阶是 2，故由引理 2 知 $2|(a-2)$，即 $2|a$。$y=2$ 时，令 $x=a$，则方程(1)有正整数解 $x=a, y=2$，此时 $p=3^a-4$。由 $3^a-4\equiv7 \pmod 8$ 知，$3^{a-1}\equiv1 \pmod 8$，类似可得 $2\nmid a$。$y\geqslant3$ 时，对方程(1)模 8 得 $3^x\equiv-1 \pmod 8$，即 $1,3\equiv-1 \pmod 8$，显然不可能，故方程(1)无 $y\geqslant3$ 的正整数解。

（Ⅲ）情形 A。$p\equiv43 \pmod{240}$，对方程(1)模 3 得 $2^y=3^x-p\equiv-1 \pmod 3$，故 $2\nmid y$。

若 $y=1$，则 $3^x-2=p$，令 $x=a$，则 $p=3^a-2$。由 $3^a-2\equiv$

收稿日期：2015-03-17
基金项目：江苏省教育科学“十二五”规划课题(D201301083)；云南省教育厅科研课题(2014Y462)；泰州学院重点课题(TZXY2014ZDKT007)
作者简介：管训贵(1963—)，男，江苏兴化人，副教授，主要从事初等数论研究。

43(mod 240)知 $3^{a-2}\equiv 5 \pmod{80}$,即 $3^{a-2}\equiv 0 \pmod 5$。因此方程(1)不可能有正整数解。

若 $y=3$,则 $3^x-8=p$,令 $x=a$,则 $p=3^a-8$。由 $3^a-8\equiv 43 \pmod{240}$ 知 $3^{a-1}\equiv 17 \pmod{80}$,但 $3^{a-1}\equiv 1,3,9,27 \pmod{80}$。矛盾,也不可能。

若 $y\geqslant 5$,对方程(1)模 16 得 $3^x\equiv p\equiv 11\equiv 27 \pmod{16}$,即 $3^{x-3}\equiv 1 \pmod{16}$。又 3 对模 16 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|(x-3)$。令 $x=4k+3$,对方程(1)模 5,并注意 $3^4\equiv 1 \pmod 5$,得 $2^y=3^x-p=3^{4k+3}-p\equiv 27-3\equiv -1\equiv -2^4 \pmod 5$,即 $2^{2(y-4)}\equiv 1 \pmod 5$。因 2 对模 5 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|2(y-4)$,即 $2|(y-4)$,从而 $2|y$,这与 $2\nmid y$ 矛盾,故方程(1)无 $y>3$ 的正整数解。

情形 B。$p\equiv 59 \pmod{240}$,对方程(1)模 3 得 $(-1)^y\equiv 1 \pmod 3$,故 $2|y$。若 $y=2$,则 $3^x-4=p$,令 $x=a$,则 $p=3^a-4$。由 $3^a-4\equiv 59 \pmod{240}$ 知 $3^{a-2}\equiv 7 \pmod{80}$。但 $3^{a-2}\equiv 1,3,9,27 \pmod{80}$。矛盾,因此方程(1)不可能有正整数解。

设 $y\geqslant 4$,对方程(1)模 16 得 $3^x\equiv p\equiv 11\equiv 27 \pmod{16}$,即 $3^{x-3}\equiv 1 \pmod{16}$。又 3 对模 16 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|(x-3)$。令 $x=4k+3$,对方程(1)模 5 得 $2^y=3^x-p\equiv 3^{4k+3}-p\equiv 27-4\equiv -2 \pmod 5$,即 $2^{2(y-1)}\equiv 1 \pmod 5$。因 2 对模 5 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|2(y-1)$,即 $2|(y-1)$,从而 $2\nmid y$,这与 $2|y$ 矛盾。故方程(1)无 $y>2$ 的正整数解。

(Ⅳ)因 $3^x>p\geqslant 67$,故 $x\geqslant 4$。对方程(1)模 9 得 $-2^y\equiv 4 \pmod 9$,即 $2^{y-2}\equiv -1 \pmod 9$,因此 $2^{2(y-2)}\equiv 1 \pmod 9$,而 2 对模 9 的阶是 6,故由引理 2 知 $6|2(y-2)$,即 $3|(y-2)$,且 $2\nmid(y-2)$,从而 $y\equiv 5 \pmod 6$。令 $y=6k+5$,对方程(1)模 8 得 $3^x\equiv p\equiv 3 \pmod 8$,故 $2\nmid x$。又对方程(1)模 7 得 $3^x=2^y+p=2^{6k+5}+p\equiv 4+4\equiv 1 \pmod 7$,故必得 $6|x$,这与 $2\nmid x$ 矛盾。故方程(1)无正整数解。

定理 1 得证。

下面证明定理 2,设方程(2)有正整数解 (x,y)。

证明　(Ⅰ)易知,$y>x\geqslant 1$。

情形 A。$p\equiv 1 \pmod 8$,若 $y=2$,则 $x=1$,但此时 $p=1$,不合题意,故 $y\geqslant 3$。对方程(2)模 8 得 $-3^x\equiv 1 \pmod 8$,即 $-1,-3\equiv 1 \pmod 8$,显然不可能,故方程(2)无正整数解。

情形 B。$p\equiv 3 \pmod 8$,若 $y=2$,则 $3^x=4-p$,只有 $p=3$,此时 $y=0$,不合题意。故 $y\geqslant 3$,对方程(2)模 8 得 $-3^x\equiv 3 \pmod 8$,即 $-1,-3\equiv 3 \pmod 8$,显然也不可能,故方程(2)无正整数解。

(Ⅱ)因 $2^y>p\geqslant 53$,故 $y\geqslant 6$。对方程(2)模 16 得 $-3^x\equiv 5\equiv -27 \pmod{16}$,即 $3^{x-3}\equiv 1 \pmod{16}$,因 3 对模 16 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|(x-3)$。令 $x=4k+3$,对方程(2)模 5,并注意 $3^4\equiv 1 \pmod 5$ 得 $2^y=3^x+p=3^{4k+3}+p\equiv 27+3\equiv 0 \pmod 5$,显然不可能,故方程(2)无正整数解。

(Ⅲ)对方程(2)模 16 得 $3^x\equiv -7\equiv 9 \pmod{16}$,即 $3^{x-2}\equiv 1 \pmod{16}$。而 3 对模 16 的阶是 4,故由引理 2 知 $4|(x-3)$。令 $x=4k+2$,对方程(2)模 9 得 $2^y=3^x+p=3^{4k+2}+p\equiv 8 \pmod 9$,即 $2^{y-3}\equiv 1 \pmod 9$。又 2 对模 9 的阶是 6,故由引理 2 知 $6|(y-3)$。令 $y=6l+3$,再对方程(2)模 7,并注意 $2^6\equiv 1 \pmod 7$,得 $3^x=2^y-p=2^{6l+3}-p\equiv 8-1\equiv 0 \pmod 7$,显然不可能,故方程(2)无正整数解。

定理 2 得证。

值得一提的是:利用取有限模的方法,还可以解决一类素数底的指数不定方程问题。

定理 3　(Ⅰ)不定方程 $1+5^x+13^y=19^z$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(1,1,1)$;

(Ⅱ)不定方程 $1+3^x+7^y=17^z$ 仅有正整数解 $(x,y,z)=(2,1,1)$。

证明　(Ⅰ)对原不定方程取模 3 得 $(-1)^x\equiv -1 \pmod 3$,故 $x\equiv 1 \pmod 2$;对原不定方程取模 5 得 $3^y\equiv(-1)^z-1 \pmod 5$,故 $z\equiv 1 \pmod 2$;对原不定方程取模 8 得 $(-3)^y\equiv -3 \pmod 8$,故 $y\equiv 1 \pmod 2$。

若 $y=1$,则原不定方程为:

$$14+5^x=19^z, \tag{3}$$

假定 $x>1$,对(3)式取模 25 得:

$$14\equiv 19^z \pmod{25}。 \tag{4}$$

因对模 25,有 $19^1\equiv 19,19^2\equiv 11,19^3\equiv 9,19^4\equiv 21,19^5\equiv 24,19^6\equiv 6,19^7\equiv 14,19^8\equiv 16,19^9\equiv 4,19^{10}\equiv 1$。故(4)式给出 $z\equiv 7 \pmod{10}$。

再对(3)式取模 11 得:

$$5^x\equiv -1 \pmod{11}, \tag{5}$$

又对模 11,有 $5^1\equiv 5,5^2\equiv 3,5^3\equiv 4,5^4\equiv 9,5^5\equiv 1$。故知(5)式不成立。于是 $x=1$,此时 $z=1$。即原不定方程有正整数解 $(x,y,z)=(1,1,1)$。

若 $y>1$,对原不定方程取模 7 知 $2^{x-z}\equiv 1 \pmod 7$。因 2 对 7 的阶是 3,故 $3|(x-z)$。注意到 $2|(x-z)$,有 $6|(x-z)$,即 $x\equiv z \pmod 6$。对原不定方程取模 13 知:

$$1+5^x\equiv 6^z \pmod{13}, \tag{6}$$

因 5 对 13 的阶是 4,6 对 13 的阶是 12,并且对模 13,有:

$5^1\equiv 5,5^2\equiv 12,5^3\equiv 8,5^4\equiv 1$;

$6^1\equiv 6,6^2\equiv 10,6^3\equiv 8,6^4\equiv 9$,

$6^5\equiv 2,6^6\equiv 12,6^7\equiv 7,6^8\equiv 3$,

$6^9\equiv 5,6^{10}\equiv 4,6^{11}\equiv 11,6^{12}\equiv 1$。

故(6)式给出 $x\equiv 1 \pmod 4$,$z\equiv 1 \pmod{12}$,从而 $x\equiv z\equiv 1 \pmod{12}$。由于 $y>1$,故对原不定方程取模 169,由 $1+5^x\equiv 19^z \pmod{169}$,依上述证明方法可得 $x\equiv 45 \pmod{52}$,即 $x\equiv 45,97,149 \pmod{156}$。但 $x\equiv 1 \pmod{12}$,故仅有 $x\equiv 97 \pmod{156}$。再对原不定方程取模 157 可得矛盾结果,即 $y>1$ 时原不定方程无正整数解。

综上,原不定方程仅有正整数解 $(x,y,z)=(1,1,1)$。

(Ⅱ)的证明类似于(Ⅰ)的证明,从略。　(下转第 41 页)

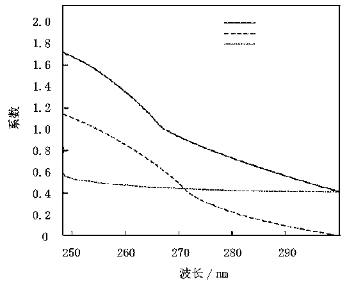

图 6　波长为 250～300 nm 的紫外光的 3 种系数

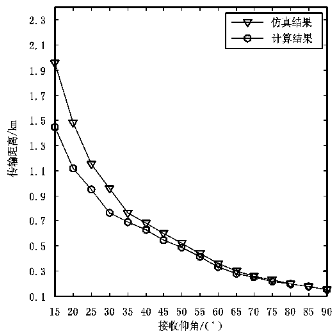

图 7　固定接收仰角为 45°时仿真与计算结果的对比

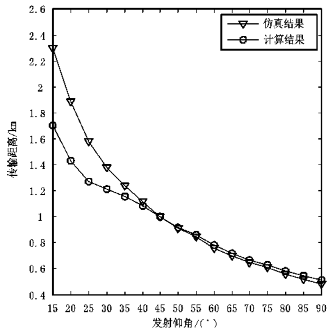

图 8　固定发射仰角为 45°时仿真与计算结果的对比

射端，只要有一端的仰角过低，就会使计算结果产生较大的误差，这是因为式(3)是根据非直视紫外光单次散射链路推导出来的，而仰角过低相当于直视通信。但只要设定合适的收发仰角就可以使误差降到 0.01 km 以下，可以满足紫外光 Mesh 通信网络中定位的要求。

3　结语

本文分析了基于三边测量法的节点定位算法，应用于无线紫外光 Mesh 通信网络中的节点定位的可行性，根据非直视紫外光单次散射链路的接收功率，推导出适合紫外光 Mesh 通信网络传输信道下节点定位的计算公式。利用大气信道仿真软件 Modtran4 对此算法进行了仿真，仿真结果表明，使用此公式进行定位计算，误差能够低于 0.01 km，可以满足紫外光 Mesh 通信网络中定位的要求。

参考文献:

[1]　庞华伟，刘天山. 紫外光通信及其军事应用[J]. 云南大学学报:自然科学版，2005，27(5A):194 - 196.

[2]　郑彦光，徐平平，常瑞. 无线 Mesh 网络技术及其应用[J]. 电力系统通信，2007，28(177):16 - 20.

[3]　牛延超. 无线传感器网络非测距定位技术研究[D]. 北京:北京交通大学，2010.

[4]　崔焕庆，王英龙，周传爱. 应用三个移动锚节点的非测距定位方法[J]. 山东科技大学学报:自然科学版，2011，30(1):53 - 57.

[5]　高雷，郑相全，张鸿. 无线传感器网络中一种基于三边测量法和质心算法的节点定位算法[J]. 重庆工学院学报:自然科学版，2009，23(7):138 - 141.

[6]　汤义男，赵卫，谢小平. 大气信道简化单次散射模型[J]. 强激光与粒子束，2013，25(1):22 - 25.

[7]　何华，柯熙政，赵太飞. 紫外光非视距单次散射链路模型的研究[J]. 光学学报，2010，30(11):3148 - 3151.

[8]　Gary A S，Melissa L N，Mrinal I，et al. NLOS UV communication for distributed sensor systems [J]. Proc. SPIE，2000，4126:83 - 95.

[9]　张静，廖云，武保剑，等. 紫外光通信大气信道模型研究[J]. 电子科技大学学报，2007，36(2):199 - 202.

[10]　王兴涛. 日盲紫外光通信系统的信号检测技术研究[D]. 北京:北京邮电大学，2011.

(责任编校:夏玉玲)

(上接第 13 页)

参考文献:

[1]　周科. 关于$|3^x - 2^y|$表素数的问题[J]. 广西师范学院学报:自然科学版，2005，22(3):15 - 17.

[2]　管训贵. 关于 Diophantine 方程 $x^y-(x\pm1)^z=1$[J]. 唐山学院学报，2011，24(3):35 - 36.

[3]　管训贵. 初等数论[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社，2011:206.

(责任编校:夏玉玲)