

木星—火星—航天器系统的零速度 曲面和转移轨道的数值研究

唐桂琴, 高发宝, 王 坤, 邱林飞

(扬州大学 数学科学学院, 江苏 扬州 225002)

摘要: 针对木星—火星—航天器系统, 根据欧拉—拉格朗日方程建立了航天器的动力学方程, 并通过数值模拟, 研究了系统的零速度曲面和 Jacobi 常数的几何结构的关系, 设计了一条可用于多任务轨道的从火星至木星的转移轨道。

关键词: 木星; 火星; 零速度曲面; 转移轨道; 数值模拟

中图分类号: O242; P135 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-349X(2015)03-0008-04

DOI: 10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.03.003

A Numerical Study of the Zero-Velocity Surface and Transfer Orbit of the Jupiter-Mars-Spacecraft System

TANG Gui-qin, GAO Fa-bao, WANG Kun, QIU Lin-fei

(College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou 225002, China)

Abstract: The authors of this paper, based on the Jupiter-Mars-Spacecraft system and the Euler Lagrange equation, established a dynamical equation of the spacecraft, carried out numerical simulation, studied the relationship between the zero-velocity surface of the system and the geometric structure of the Jacobi constant and designed a multi-task transfer orbit from Mars to Jupiter.

Key Words: Jupiter; Mars; zero-velocity surface; transfer orbit; numerical simulation

0 引言

在深空探测任务中, 假设其中一个质量体的质量与其他两个天体的质量相比时, 小到可以忽略, 这样的三体问题就称为限制性三体问题。这个小质量的天体一般称为无限小质量体, 把两个大质量的天体称为有限质量体。由于无限小质量体的质量可以看成无限小, 所以就可以不考虑它对另外两个有限质量体的吸引, 也就是说, 它不影响这两个有限质量体的运动。如果三体中的这两个有限质量体以一定的角速度绕其公共质心作匀速圆周运动, 则此三体问题就称为圆型限制性三体问题^[1-5]。随着第二轮深空探测热潮的到来, 火星、木星等天体正逐渐成为各航天大国的探测重点^[6-7]。自 1976 年火星着陆器第一次成功登陆火星以来, 人类已经发射多个火星探测器, 对火星的探测积累了丰富的经验。由

于地球距离木星要比火星远得多, 因此人类对木星的探测也少得多。但如果借助探索火星的成功经验, 设计一条火星至木星的转移轨道, 就可以在探测火星的同时探测木星。当然, 由于限制性三体问题存在相应的零速度曲面, 使得无限小质量体不能无限地在宇宙空间中任意飞行。在实际探测任务中, 零速度曲面具有极其重要的应用价值, 利用零速度曲面不但可以确定火箭飞向月球的最小速度, 在讨论运动区域时 also 具有重要的意义, 近年来还被用来研究双星的演化。

本文将深入分析由火星—木星—航天器组成的限制性三体系统的零速度曲面的几何结构, 讨论多种情形下 Jacobi 常数对航天器飞行区域的影响, 同时针对其中最重要的一种情形, 数值模拟出一条航天器可在火星和木星之间飞行的转移轨道。该轨道可用于多任务轨道的设计, 相比独立探测火星和木星来说, 将会减少大量的能源消耗并节省可观的费用。

收稿日期: 2015-03-04

基金项目: 国家自然科学基金项目(11302187); 扬州大学大学生科技创新基金项目(b13121)

作者简介: 唐桂琴(1992—), 女, 江苏南通人, 本科生, 主要从事数值微积分的高效逼近与可视化研究。

1 圆型限制性三体模型

首先介绍两个常用坐标系:质心惯性坐标系 $OXYZ$ 和质心转动坐标系 $oxyz$ 。质心惯性坐标系 $OXYZ$ 中由航天器 M 、木星 M_1 和火星 M_2 组成的系统,坐标系的原点 O 在 M_1 和 M_2 的质心(如图1所示),其中 X - Y 平面是木星-火星系统的轨道平面, M_1 和 M_2 围绕它们的公共质心作圆周运动,航天器 M 只受到 M_1 和 M_2 的引力作用。 X 轴由 M_1 指向 M_2 , Y 轴与之垂直并满足右手坐标系(默认 Z 轴垂直于轨道平面 X - Y)。 M , M_1 和 M_2 的质量分别为 m , m_1 和 m_2 , 且 $m \ll m_1, m_2$ 。

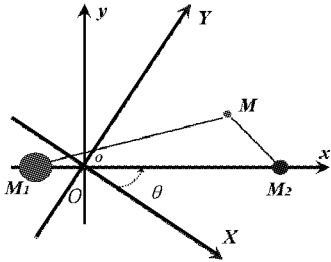


图1 惯性和转动坐标系

方便起见,假设 $[m]$, $[L]$ 和 $[T]$ 分别为质量单位、长度单位和时间单位, $L_{M_1 M_2}$ 为火星和木星的平均距离, ω 为火星和木星相对运动的角速度,通常按照 $[m] = m_1 + m_2$, $[L] = L_{M_1 M_2}$, $[T] = [L_{M_1 M_2} / (G(m_1 + m_2))]^{1/2} = 1/\omega$ 对系统进行无量纲化。图1中 θ 为 M_1 和 M_2 的连线绕其质心转过的角度,系统的质量比率 $\mu = m_2 / (m_1 + m_2)$, 火星和木星到其公共质心的无量纲距离分别为 $1-\mu$ 和 μ 。质心转动坐标系 $oxyz$ 的原点 o 和质心惯性坐标系的原点 O 重合,其坐标轴 x 和 y 以单位角速度围绕其质心作逆时针转动(相对于惯性坐标系中的 X 轴和 Y 轴),并假设两个坐标系在时间 $t=0$ 时重合,则有 $\theta=t$ 。如果 (x, y, z) 表示小天体 M 在质心转动坐标系中的位置,则有

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{其中 } \mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

将方程(1)两边对时间 t 求导,得到

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{R}}_t \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{R}_t \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = -\mathbf{R}_t \mathbf{J} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{R}_t \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_t \begin{bmatrix} \dot{x}-y \\ \dot{y}+x \\ \dot{z} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是在质心转动坐标系下,系统的拉格朗日函数为:

$$L = \frac{1}{2}((\dot{x}-y)^2 + (\dot{y}+x)^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z), \quad (3)$$

$$\text{其中 } U(x, y, z) = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, r_1 = [(x+\mu)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$r_2 = [(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}.$$

将方程(3)代入欧拉-拉格朗日方程^[3],得到质心转动坐标系 $oxyz$ 下航天器运动方程:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = x - U_x, \quad (4a)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = y - U_y, \quad (4b)$$

$$\ddot{z} = -U_z. \quad (4c)$$

定义广义势能 $\Omega(x, y, z)$ 为:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - U(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad (5)$$

则质心转动坐标系 $oxyz$ 中航天器运动的无量纲方程可改写为:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \Omega_x, \quad (6a)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \Omega_y, \quad (6b)$$

$$\ddot{z} = \Omega_z. \quad (6c)$$

2 木星-火星-航天器系统的零速度曲面分析

方程(6a)-(6c)3式的两边分别同乘以 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 和 $\dot{z}$, 得到

$$\ddot{x}\dot{x} - 2\dot{y}\dot{x} = \Omega_x \dot{x}, \quad (7a)$$

$$\ddot{y}\dot{y} + 2\dot{x}\dot{y} = \Omega_y \dot{y}, \quad (7b)$$

$$\ddot{z}\dot{z} = \Omega_z \dot{z}. \quad (7c)$$

将方程(7a)-(7c)3式的两边分别相加,得

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \Omega_x \dot{x} + \Omega_y \dot{y} + \Omega_z \dot{z}, \quad (8)$$

对方程(8)两边积分得到航天器的运动状态流形:

$$2\Omega(x, y, z) - v^2 = C, \quad (9)$$

其中航天器速度 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, C 为 Jacobi 常数。

由于航天器的飞行区域由 $v^2 \geq 0$ 决定,因此航天器的运动区域将由此流形决定。方程(7)在三维空间中所张成的曲面称为零速度曲面或 Hill 曲面,在二维平面上则表现为一系列的曲线,称为零速度曲线。二者的几何结构将随着 Jacobi 常数 C 的变化而变化。根据美国国家航空航天局的官方数据, $m_1 = 1898.3e+24$ kg, $m_2 = 0.64174e+24$ kg, 那么系统的质量比率 $\mu = 3.379461236e-04$ 。

三维空间中,航天器的禁飞区域或零速度面 ($2.99967 \leq C \leq 3.023$) 如图2所示。当 Jacobi 常数 C 的取值逐渐减小时,表明系统消耗的能量逐渐增大,那么零速度曲面所张成的范围越来越小,此时航天器的飞行区域逐渐开阔;当 Jacobi 常数 C 的取值逐渐增大时,此时系统消耗的能量逐渐减小,

航天器没有足够的能量,就像陷入了一个势阱区域,其飞行的区域也就越来越小,最终甚至飞不出图中木星所在的“大圆”区域或者火星所在的“小圆”区域。

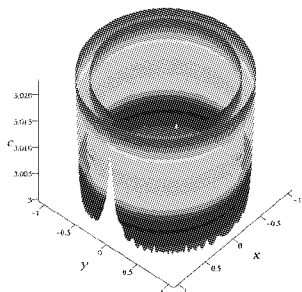


图 2 航天器的零速度曲面 $C \in [2.999\ 67, 3.023]$

二维平面中,当 $C=3.023$ 时,图 2 中最上面的区域由三个“圆”组成,其中最外围的“大圆”围绕着中间的木星所在区域的“大圆”以及火星所在区域的“小圆”,且三者呈相离状态,说明此时航天器仅能围绕木星或者火星飞行,却不能在两星之间作穿越飞行,如图 3 所示。

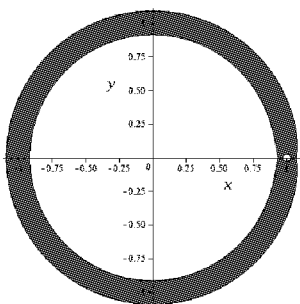


图 3 航天器的零速度曲线 $C=3.023$

当 C 由 3.023 逐渐减小时,图 3 中木星和火星所在的区域逐渐相互靠近。当 C 减小到 3.019 9 时,两个区域连接成了“ ∞ ”形。此时,虽然航天器的飞行区域有所增加,但“ ∞ ”形腰部的那个交叉点(0.950 359 873 1,0),却成了航天器在木星和火星之间作穿越飞行的“要塞”,如图 4 所示。图 4 局部放大的部分如图 5 所示。

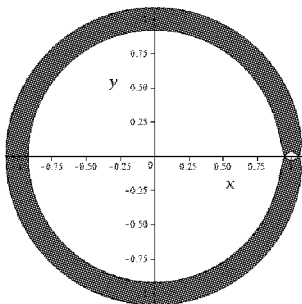


图 4 航天器的零速度曲线 $C=3.019\ 9$

当 $C < 3.019\ 9$ 且逐渐减小时,连接木星和火星之间飞行区域的“要塞”被打开,如图 6 所示,此时航天器不仅可以在木星和火星各自的区域飞行,还可以通过转移轨道从其中

一个星球穿越飞行到另一个星球。

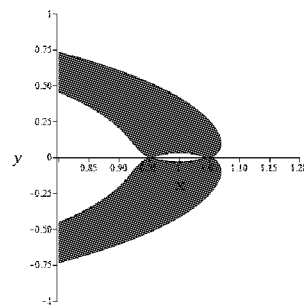


图 5 航天器的局部零速度曲线 $C=3.019\ 9$

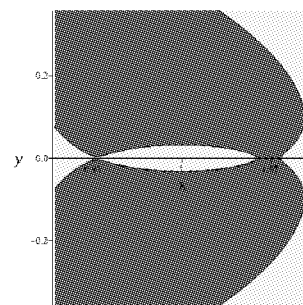


图 6 航天器的零速度曲线 $C=3.019\ 8$

当 C 减小到 3.019 42 时,木星和火星之间“保龄球”状飞行区域与最外围的“大圆”在临界点(1.049 041 965,0)处连接在一起,演化出新的“要塞”,如图 7 所示,航天器仅能在“保龄球”状飞行区域内部自由活动,但不能穿越飞行到外围的宇宙空间。

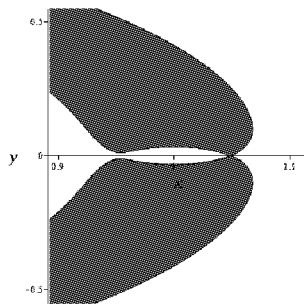
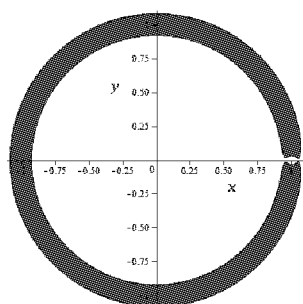
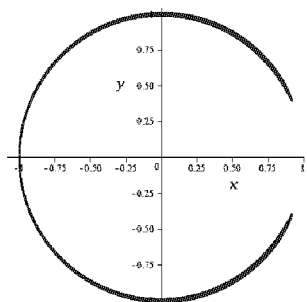
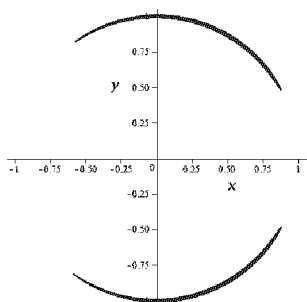
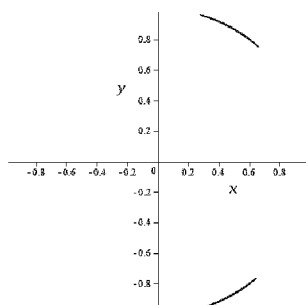


图 7 航天器的零速度曲线 $C=3.019\ 42$

当 C 继续逐渐减小时,“保龄球”状飞行区域与外围宇宙空间之间新的“要塞”(1.049 041 965,0)被打开。当 $C=3.019$ 时,探测器不仅可以在木星和火星之间来回飞行,还可通过打开的新“要塞”去探索外围的宇宙空间,如图 8 所示。

当 C 再次逐渐减小至 3.000 4 时,航天器的禁飞区域已退缩至由两块弯弧状在临界点(-0.995 600 046 3,0)处连接成的区域,如图 9 所示。此时,航天器虽然可以通过新打开的“要塞”缺口飞向外围宇宙空间,但却不能通过两块弯弧状连接点处飞向外围宇宙空间。随着 C 越来越小,航天器的禁飞区域也逐渐变小,如图 10 和 11 所示。

图8 航天器的零速度曲线 $C=3.019$ 图9 航天器的零速度曲线 $C=3.0004$ 图10 航天器的零速度曲线 $C=3.0001$ 图11 航天器的零速度曲线 $C=2.9997$

通过上述数值模拟结果,我们发现当 Jacobi 常数 C 的值较大时,它描绘出一条远离原点且形状近于圆形的闭曲线以及两条分别围绕木星和火星的闭曲线;当 C 的值逐渐减小时,木星和火星附近的两条闭曲线却逐渐扩大,随后在交点处相遇,由于在交点处曲线的法线方向不确定,也就是奇点的情况,那么这个交点实际上就是平动点 L_1 。类似地,当 C

继续减小时,两条闭曲线在平动点 L_1 处融合成一条不断膨胀的闭曲线并与不断缩小的外面曲线相遇于平动点 L_2 ;当 C 再继续减小,里外两曲线变成一条在平动点 L_3 处自交的闭曲线;最后,当 C 再度减小时,曲线分裂成上下两块,最终收缩为两个平动点 L_4 和 L_5 。 L_1, L_2 和 L_3 三个平动点,它们在火星和木星的连线上,也称为共线平动点,而 L_4 和 L_5 这两个平动点关于坐标轴对称且分别与火星和木星组成等边三角形,也称为三角平动点^[1,4,8]。

3 木星—火星之间转移轨道的数值模拟

在实际的深空探测任务中,图8是我们最为关注的情形,最具应用价值。因为如果 Jacobi 常数 C 的取值比图7中的 C 还大的话,航天器没有足够的能量,脱离不了火星或者木星引力的束缚;如果 Jacobi 常数 C 的取值比图9中的值还小的话,这不但意味着航天器系统需要消耗大量的能量,而且对运载火箭等也提出了更高的要求,甚至能否成功地将航天器从地球发射至火星都是个未知数。只有当 Jacobi 常数 C 的取值介于上述两种情形之间时,航天器既能飞离木星—火星系统,又不需携带额外的能量。

我们选取适当的初始条件 $[0.9996, 0, 0, -39, -0.9, -0.12]$,通过数学软件 Matlab 2011a 对系统(6)进行数值模拟,得到一条从火星 $(0.9996, 0, 0)$ 出发,最终到达木星周围 $(-0.0003345, 0.002237, -0.002645)$ 的转移轨道,如图12所示。

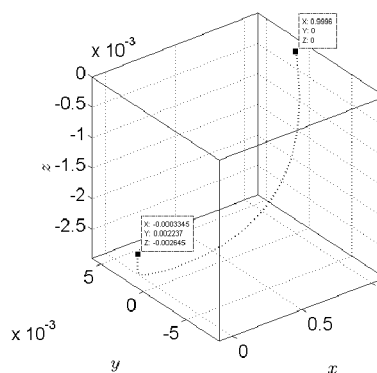


图12 火星到木星的转移轨道

4 结论

本文深入讨论了木星—火星—航天器系统的零速度曲线、零速度曲面的几何结构和 Jacobi 常数 C 的关系。结果表明:随着 C 的取值逐渐增大,虽然此时系统需要消耗的能量越来越小,但探测器能够飞行的区域也随之逐渐缩小;反之,随着 C 的取值逐渐减小,探测器能够飞行的区域也越来越大,连接火星和木星之间的禁飞区域也将首次在平动点 L_1 处打开,此时环绕火星(木星)飞行的航天器就可以被木星(火星)捕获;或者说,火星(木星)航天器将会逃逸到环绕木星(火星)飞行的轨道上。由于 C 的取值越小,(下转第44页)

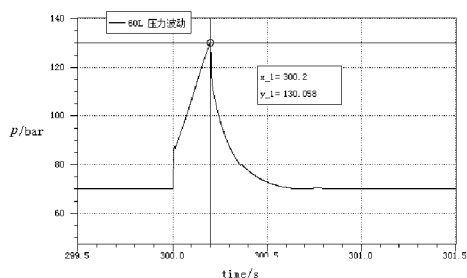


图 5 压力曲线(蓄能器容积 60 L)

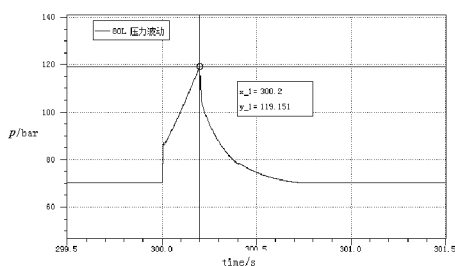


图 6 压力曲线(蓄能器容积 80 L)

样的外力变化下,压力冲击不断减小。最极端情况下,假设蓄能器容积为无限大,那么柱塞式液压缸的压力就永远等于蓄能器的压力,并保持不变,即压力波动为零。所以,蓄能器容积越大,吸收压力冲击能力就越强。增大蓄能器容积能有效增强液压系统吸收压力冲击的效果,容许颗粒物更大的物料进入辊压机粉碎。考虑到容积为 80 L 蓄能器体积较大,与辊压机整体尺寸不相匹配,故将蓄能器改为 2 个 40 L 蓄能器,通过仿真验证,得出压力曲线,如图 7 所示。最高压力为 93.95 bar,符合系统要求^[3]。

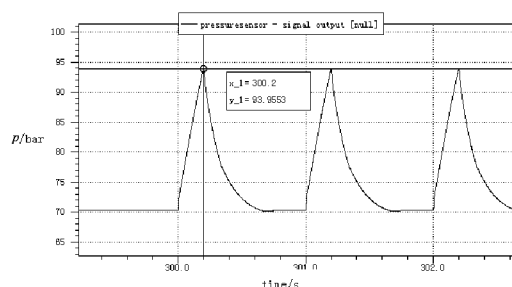


图 7 压力曲线

4 结论

本文利用 AMESim 软件搭建了辊压机液压系统仿真模型,并通过对蓄能器在回路中的作用仿真实验验证了模型的可靠性。在此基础上,通过对蓄能器型号对液压冲击的仿真分析,获得增大蓄能器容积能有效增强液压系统吸收压力冲击的效果这一结论,并进而通过仿真曲线对比,确定了主控蓄能器的容积选型。

参考文献:

- [1] 赵志国,余洋,鲁冰,等. 基于 AMESim 的轨道架线车升降平台液压系统仿真[J]. 机床与液压, 2010, 38(24): 61-63.
- [2] 付永领,祁晓野. AMESim 系统建模和仿真:从入门到精通[M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 2006.
- [3] 柯尊荣. 辊压机液压系统建模与主控蓄能器研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2003.

(责任编辑:白丽娟)

(上接第 11 页)系统需要消耗的能量越大,对运载火箭系统的要求也越来越高,使得很多的探测任务不能实施,所以我们最希望关注的还是二者的最优情形,即根据探测器实际探测任务的飞行范围和火箭的实际运载能力,选取适当的 Jacobi 常数 C ,使得航天器的飞行范围尽可能大的同时系统携带的能量尽可能地小。因为消耗的燃料越少,飞行器的总重量也就越轻,飞行器的重量每减少 1 kg,不但可以使运载火箭减轻 500 kg,还能拓宽发射窗口,延长航天器运行的寿命。

此外,对于火星-木星-航天器系统,本文还数值模拟出一条火星和木星之间的转移轨道,该转移轨道可用于多任务轨道的设计,由于人类探测火星所积累的经验越来越多,因此将大大提高探测火星的成功率,在探测火星的同时探测木星,相对于独立探测火星和木星来说,可节约大量的财力和物力。

参考文献:

- [1] Marchal C. The three-body problem: the restricted problem of three bodies[M]. Amsterdam: Elsevier Publishing Company, 1990.

- [2] Gao F B, Zhang W. A study on periodic solutions for the circular restricted three-body problem[J]. Astronomical Journal, 2014, 148(6): 116.
- [3] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design[M]. Springer, 2011: 32-34.
- [4] 刘林,侯锡云. 深空探测器轨道力学[M]. 北京:电子工业出版社, 2012.
- [5] 刘瞰,赵钧. 空间飞行器动力学[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2003.
- [6] 陈杨,宝音贺西,李俊峰. 木星探测轨道分析与设计[J]. 天文学报, 2012(2): 106-118.
- [7] 李俊峰,宝音贺西. 深空探测中的动力学与控制[J]. 力学与实践, 2007(4): 1-8.
- [8] 徐明. 平动点轨道的动力学与控制研究综述[J]. 宇航学报, 2009(4): 1299-1313.

(责任编辑:夏玉玲)