第 28 卷第 3 期　　唐山学院学报　　Vol. 28 No. 3
2015 年 05 月　　Journal of Tangshan College　　may2015

非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 是优美图的 5 个充分条件

吴跃生

（华东交通大学 理学院，南昌 330013）

摘要：讨论了非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 的优美性，给出了非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 是优美图的 5 个充分条件。

关键词：优美图；交错图；非连通图；优美标号

中图分类号：O157.5　**文献标志码：**A　**文章编号：**1672－349X(2015)03－0004－04

DOI：10.16160/j.cnki.tsxyxb.2015.03.002

On Five Sufficient Conditions for the Gracefulness of Unconnected Graph $2C_{4m}\cup G$

WU Yue-sheng

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The author of this paper discusses the gracefulness of the unconnected graph $2C_{4m}\cup G$ and puts forward five sufficient conditions for the gracefulness of the unconnected graph.

Key Words: graceful graph; alternative graph; unconnected graph; graceful labeling

1　相关概念

图的优美标号问题是组合数学中的一个热门课题。

定义 1[1]　对于一个图 $G=(V,E)$，如果存在一个单射 $\theta:V(G)\to[0,|E(G)|]$ 使得对所有边 $e=(u,v)\in E(G)$，由 $\theta'(e)=|\theta(u)-\theta(v)|$ 导出的映射 $\theta':E(G)\to[1,|E(G)|]$ 是一一对应的，则称 G 是优美图，θ 是 G 的一组优美标号。

定义 2[2]　设 G 是一个优美二部图，其优美标号为 θ，$V(G)=X\cup Y$，且 $X\cap Y=\Phi$，如果 $\max\limits_{v\in X}\{\theta(v)\}=k<\min\limits_{v\in Y}\{\theta(v)\}=k+1$，则称 θ 是 G 的交错标号，称 G 是在交错标号 θ 下的交错图，称 k 是交错标号 θ 的特征值。

本文所讨论的图均为无向简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。记号 G_{k+m} 表示图 G 是特征为 k 且缺 $k+m$ 标号值的交错图。记号 $[m,n]$ 表示整数集合 $\{m,m+1,\cdots,n\}$，其中 m 和 n 均为非负整数，且满足 $0\leqslant m<n$。未说明的符号及术语均同文献[1]。

文献[1]已经证明了非连通图 $2C_{4m}$ 是优美图。文献[2]研究了非连通图 $2C_{4m}\cup C_n$ 的优美性，证明了非连通图 $2C_{4m}\cup C_{8m-1}$，$2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}$ 和 $2C_{4(3m+1)}\cup C_{4(2m+1)}$ 是优美图。文献[3]讨论了非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 的优美性，给出了非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 是优美图的一个充分条件：对任意正整数 m，设 G 是特征为 k，且缺 $k+2m+1$ 标号值的交错图，则非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 存在特征为 $4m+k+1$，且缺 $k+1$ 标号值的交错标号 $(2m+1\leqslant k+2m+1\leqslant|E(G)|)$。

本文继续讨论非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 的优美性，给出非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 的是优美图的五个充分条件。

2　主要结论及其证明

定理 1　对任意正整数 m，如果 $2m\leqslant k+2m\leqslant|E(G)|$，则非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+2m}$ 存在特征为 $4m+k$，且缺 $k+8m$ 标号值的交错标号。

证明　把 $2C_{4m}$ 中的一个圈记作 $C_{4m}^{(1)}$，另一个记作 $C_{4m}^{(2)}$，设 $V(C_{4m}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$V(C_{4m}^{(2)})=\{y_1,y_2\cdots,y_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{4m-1}y_{4m},y_{4m}y_1\}$，设 X,Y 是图 G_{k+2m} 的一个二分化，θ_1 是图 G 的交错标号，且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+2m})|=q$。

把非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+2m}$ 的顶点标号 θ 定义为：

$\theta(x_{2i})=2m+i+k+1,i=1,2,\cdots,m-1$；

$\theta(x_{2m})=m+k+1,\theta(x_{2i})=2m+i+k,i=m+1,m+2,\cdots,2m$；

$\theta(x_{2i-1})=6m-i+k+1,i=1,2,\cdots,2m$；

$\theta(y_{2i-1})=8m-i+k,i=1,2,\cdots,2m-1$；

收稿日期：2014－10－20

基金项目：国家自然科学基金项目(11261019,11361024)；江西省教育厅 2014 年度科学技术研究项目(GJJ14380)

作者简介：吴跃生(1959－)，男，江西瑞金人，副教授，硕士，主要从事图论研究。

$\theta(y_{4m-1})=k+10m$。

$\theta(y_{2i})=\begin{cases}i+k,i=1,2,\cdots,m\\ i+k+1,i=m+1,m+2,\cdots,2m\end{cases}$，

$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X\\ \theta_1(v)+8m,v\in Y\end{cases}$。

(1)　$\theta:V(C_{4m}^{(1)})\to[2m+k+2,6m+k]\cup\{k+m+1\}$ 是单射；

$\theta:V(C_{4m}^{(2)})\to[k+1,2m+k+1]\cup[6m+k+1,8m+k-1]\cup\{k+10m\}-\{k+m+1\}$ 是单射；

$\theta:X\to[0,k]$ 是单射(或双射)；$\theta:Y\to[k+8m+1,q+8m]-\{k+10m\}$ 是单射；

因而，映射 $\theta:V(2C_{4m}\cup G_{k+2m})\to[0,q+8m]-\{k+8m\}$ 是单射。

(2)　$\theta'(x_{2i-1}x_{2i})=\begin{cases}4m-2i,i=1,2,\cdots,m-1\\ 4m-2i+1,i=m+1,m+2,\cdots 2m\end{cases}$。

$\theta'(x_{2m-1}x_{2m})=4m$，

$\theta'(x_{2i}x_{2i+1})=\begin{cases}4m-2i-1,i=1,2,\cdots,m-1\\ 4m-2i,i=m+1,m+3,\cdots,2m-1\end{cases}$。

$\theta'(x_{2m}x_{2m+1})=4m-1,\theta'(x_{4m}x_1)=2m$，

$\theta':E(C_{4m}^{(1)})\to[1,4m]$ 是双射；

$\theta'(y_{2i-1}y_{2i})=\begin{cases}8m-2i,i=1,2,\cdots,m\\ 8m-2i-1,i=m+1,m+2,\cdots,2m-1\end{cases}$。

$\theta'(y_{4m-1}y_{4m})=8m-1$，

$\theta'(y_{2i}y_{2i+1})=\begin{cases}8m-2i-1,i=1,2,\cdots,m\\ 8m-2i-2,i=m+1,m+2,\cdots,2m-1\end{cases}$。

$\theta'(y_{4m-2}y_{4m-1})=8m,\theta'(y_{4m}y_1)=6m-2$，

$\theta':E(C_{4m}^{(2)})\to[4m+1,8m]$ 是双射；

$\theta':E(G_{k+2m})\to[8m+1,q+8m]$ 是双射。

因而，映射 $\theta':E(2C_{4m}\cup G_{k+2m})\to[1,q+8m]$ 一一对应，所以 θ 就是非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+2m}$ 的缺 $k+8m$ 标号值的优美标号。

令 $X_1=X\cup\{x_{2i},i=1,2,\cdots,2m\}\cup\{y_{2i},i=1,2,\cdots,2m\}$，$Y_1=Y\cup\{x_{2i-1},i=1,2,\cdots,2m\}\cup\{y_{2i-1},i=1,2,\cdots,2m\}$，则有 $\max\limits_{v\in X_1}\theta(v)=\theta(x_{4m})=4m+k<\min\limits_{v\in Y_1}\theta(v)=\theta(x_{4m-1})=4m+k+1$。

所以，θ 就是非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+2m}$ 的特征为 $4m+k$，且缺 $k+8m$ 标号值的交错标号。证毕。

定理 2　对任意正整数 m，如果 $6m-1\leqslant k+6m-1\leqslant|E(G)|$，则非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+6m-1}$ 存在缺 $k+8m$ 标号值的优美标号。

证明　把 $2C_{4m}$ 中的一个圈记作 $C_{4m}^{(1)}$，另一个记作 $C_{4m}^{(2)}$，设 $V(C_{4m}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$V(C_{4m}^{(2)})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{4m-1}y_{4m},y_{4m}y_1\}$，设 X,Y 是图 G_{k+6m-1} 的一个二分化，θ_1 是图 G_{k+6m-1} 的交错标号，且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+6m-1})|=q$。

定义非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+6m-1}$ 的顶点标号 θ 为：

$\theta(x_{2i})=6m-i+k-1,i=1,2,\cdots,m-1$；

$\theta(x_{2m})=7m+k-1$，

$\theta(x_{2i})=6m-i+k,i=m+1,m+2,\cdots,2m$；

$\theta(x_{2i-1})=2m+i+k-1,i=1,2,\cdots,2m$；

$\theta(y_{2i-1})=i+k,i=1,2,\cdots,2m-1$；

$\theta(y_{4m-1})=k+14m-1$。

$\theta(y_{2i})=\begin{cases}8m-i+k,i=1,2,\cdots,m\\ 8m-i+k-1,i=m+1,m+2,\cdots,2m\end{cases}$，

$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v),v\in X\\ \theta_1(v)+8m,v\in Y\end{cases}$。

(1)　$\theta:V(C_{4m}^{(1)})\to[2m+k,6m+k-2]\cup\{k+7m-1\}$ 是单射；

$\theta:V(C_{4m}^{(2)})\to[k+1,2m+k-1]\cup[6m+k-1,8m+k-1]\cup\{k+14m-1\}-\{k+7m-1\}$ 是单射；

$\theta:X\to[0,k]$ 是单射(或双射)；$\theta:Y\to[k+8m+1,q+8m]-\{k+14m-1\}$ 是单射；

因而，映射 $\theta:V(2C_{4m}\cup G_{k+6m-1})\to[0,q+8m]-\{k+8m\}$ 是单射。

(2)　$\theta':E(C_{4m}^{(1)})\to[1,4m]$ 是双射；

$\theta':E(C_{4m}^{(2)})\to[4m+1,8m]$ 是双射；

$\theta':E(G_{k+6m-1})\to[8m+1,q+8m]$ 是双射。

因而，映射 $\theta':E(2C_{4m}\cup G_{k+6m-1})\to[1,q+8m]$ 一一对应，θ 就是非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+6m-1}$ 的缺 $k+8m$ 标号值的优美标号。

定理 3　对任意正整数 m，如果 $6m\leqslant k+6m\leqslant|E(G)|$，则非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+6m}$ 存在缺 $k+1$ 标号值的优美标号。

证明　把 $2C_{4m}$ 中的一个圈记作 $C_{4m}^{(1)}$，另一个记作 $C_{4m}^{(2)}$，设 $V(C_{4m}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$V(C_{4m}^{(2)})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{4m-1}y_{4m},y_{4m}y_1\}$，设 X,Y 是图 G_{k+6m} 的一个二分化，θ_1 是图 G_{k+6m} 的交错标号，且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+6m})|=q$。

定义非连通图 $2C_{4m}\cup G_{k+6m}$ 的顶点标号 θ 为：

$\theta(x_{2i})=6m-i+k,i=1,2,\cdots,m-1$；

$\theta(x_{2m})=7m+k$，

$\theta(x_{2i})=6m-i+k+1,i=m+1,m+2,\cdots,2m$；

$\theta(x_{2i-1})=2m+i+k,i=1,2,\cdots,2m$；

$\theta(y_{2i-1})=i+k+1,i=1,2,\cdots,2m-1$；

$\theta(y_{4m-1})=k+14m$。

$\theta(y_{2i})=\begin{cases}8m-i+k+1,i=1,2,\cdots,m\\ 8m-i+k,i=m+1,m+2,\cdots,2m\end{cases}$，

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+8m, v\in Y\end{cases}。$$

(1) $\theta:V(C_{4m}^{(1)})\to[2m+k+1,6m+k-1]\cup\{k+7m\}$是单射；

$\theta:V(C_{4m}^{(2)})\to[k+2,2m+k]\cup[6m+k,8m+k]\cup\{k+14m\}-\{k+7m\}$是单射；

$\theta:X\to[0,k]$是单射(或双射)；$\theta:Y\to[k+8m+1,q+8m]-\{k+14m\}$是单射；

因而，映射$\theta:V(2C_{4m}\cup G_{k+6m})\to[0,q+8m]-\{k+1\}$是单射。

(2) $\theta':E(C_{4m}^{(1)})\to[1,4m]$是双射；

$\theta':E(C_{4m}^{(2)})\to[4m+1,8m]$是双射；

$\theta':E(G_{k+6m})\to[8m+1,q+8m]$是双射。

因而，映射$\theta':E(2C_{4m}\cup G_{k+6m})\to[1,q+8m]$一一对应，$\theta$就是非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m}$的缺$k+1$标号值的优美标号。

定理 4 对任意正整数m，如果$6m\leqslant k+6m\leqslant|E(G)|$，则非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m}$存在缺$k+2m$标号值的优美标号。

证明 把$2C_{4m}$中的一个圈记作$C_{4m}^{(1)}$，另一个记作$C_{4m}^{(2)}$，设$V(C_{4m}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$V(C_{4m}^{(2)})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{4m-1}y_{4m},y_{4m}y_1\}$，设$X,Y$是图$G_{k+6m}$的一个二分化，$\theta_1$是图$G_{k+6m}$的交错标号，且$\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+6m})|=q$。

定义非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m}$的顶点标号θ为：

$$\theta(x_i)=\begin{cases}\dfrac{i}{2}+k, i=2,4,6,\cdots,4m-2\\ 14m+k, i=4m\\ 8m-\dfrac{i-1}{2}+k, i=1,3,\cdots,2m-1\\ 8m-\dfrac{i-1}{2}+k, i=2m+1,2m+3,\cdots 4m-1\end{cases},$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}2m+\dfrac{i+1}{2}+k, i=1,3,\cdots,4m-1\\ 6m-\dfrac{i}{2}+k, i=2,4,\cdots,2m-2\\ 7m+k, i=2m\\ 6m-\dfrac{i}{2}+1+k, i=2m+2,2m+4,\cdots 4m\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+8m, v\in Y\end{cases}。$$

(1) $\theta:V(C_{4m}^{(1)})\to[k+1,2m-1+k]\cup[6m+k,8m+k]\cup\{k+14m\}-\{k+7m\}$是单射；

$\theta:V(C_{4m}^{(2)})\to[2m+k+1,6m+k-1]\cup\{k+7m\}$是单射；

$\theta:X\to[0,k]$是单射(或双射)；$\theta:Y\to[k+8m+1,q+8m]-\{k+14m\}$是单射。

因而，映射$\theta:V(2C_{4m}\cup G_{k+6m})\to[0,q+8m]-\{k+2m\}$是单射。

(2) $\theta':E(C_{4m}^{(1)})\to[1,4m]$是双射；

$\theta':E(C_{4m}^{(2)})\to[4m+1,8m]$是双射；

$\theta':E(G_{k+6m})\to[8m+1,q+8m]$是双射。

因而，映射$\theta':E(2C_{4m}\cup G_{k+6m})\to[1,q+8m]$一一对应，$\theta$就是非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m}$的缺$k+2m$标号值的优美标号。

定理 5 对任意正整数m，如果$6m+1\leqslant k+6m+1\leqslant|E(G)|$，则非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m+1}$存在缺$k+6m$标号值的优美标号。

证明 把$2C_{4m}$中的一个圈记作$C_{4m}^{(1)}$，另一个记作$C_{4m}^{(2)}$，设$V(C_{4m}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{4m-1}x_{4m},x_{4m}x_1\}$，$V(C_{4m}^{(2)})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{4m}\}$，$E(C_{4m}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{4m-1}y_{4m},y_{4m}y_1\}$，设$X,Y$是图$G_{k+6m+1}$的一个二分化，$\theta_1$是图$G_{k+6m+1}$的交错标号，且$\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G_{k+6m+1})|=q$。

定义非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m+1}$的顶点标号θ为：

$$\theta(x_i)=\begin{cases}\dfrac{i}{2}+k, i=2,4,\cdots,2m-2\\ \dfrac{i}{2}+1+k, i=2m,2m+2,\cdots,4m-2\\ 14m+1+k, i=4m\\ 8m-\dfrac{i-1}{2}+k, i=1,3,\cdots,4m-1\end{cases},$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}6m-\dfrac{i+1}{2}+k, i=1,3,\cdots,4m-1\\ 2m+\dfrac{i}{2}+k, i=2,4,\cdots,2m-2\\ m+k, i=2m\\ 2m+\dfrac{i-2}{2}+k, i=2m+2,2m+4,\cdots 4m\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+8m, v\in Y\end{cases}。$$

(1) $\theta:V(C_{4m}^{(1)})\to[k+1,2m+k]\cup[6m+1+k,8m+k]\cup\{k+14m+1\}-\{k+m\}$是单射；

$\theta:V(C_{4m}^{(2)})\to[2m+k+1,6m+k-1]\cup\{k+m\}$是单射；

$\theta:X\to[0,k]$是单射(或双射)；$\theta:Y\to[k+8m+1,q+8m]-\{k+14m+1\}$是单射；

因而，映射$\theta:V(2C_{4m}\cup G_{k+6m+1})\to[0,q+8m]-\{k+6m\}$是单射。

(2) $\theta':E(C_{4m}^{(1)})\to[1,4m]$是双射；

$\theta':E(C_{4m}^{(2)})\to[4m+1,8m]$是双射；

$\theta':E(G_{k+6m+1})\to[8m+1,q+8m]$是双射。

因而，映射$\theta':E(2C_{4m}\cup G_{k+6m+1})\to[1,q+8m]$一一对应，$\theta$就是非连通图$2C_{4m}\cup G_{k+6m+1}$的缺$k+6m$标号值的优美标号。

引理 1[3] 圈c_{4n}存在特征为$2n-1$，且缺$3n$的交错

标号。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 1 和引理 1 有以下推论。

推论 1　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{4m}\cup C_{8m-4}$ 存在特征为 $8m-3$ 且缺 $12m-3$ 标号值的交错标号。

例 1　当 $m=2$ 时,非连通图 $2C_8\cup C_{12}$ 的特征为 13 且缺 21 标号值的交错标号为:

20,6,19,7,18,9,25,10;

17,11,16,8,15,12,14,13;

0,28,1,27,2,26,3,24,4,23,5,22。

注意到:$12m-3=(8m-3)+4m$,由定理和推论 1 有如下推论。

推论 2　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{8m}\cup(2C_{4m}\cup C_{8m-4})$ 存在特征为 $16m-3$ 且缺 $24m-3$ 标号值的交错标号。

例 2　当 $m=4$ 时,非连通图 $2C_{16}\cup(2C_8\cup C_{12})$ 的特征为 29 且缺 45 标号值的交错标号为:

37,23,36,24,35,25,34,18,33,26,32,27,31,28,30,29;

44,14,43,15,42,16,41,17,40,19,39,20,38,21,53,22;

52,6,51,7,50,9,57,10;

49,11,48,8,47,12,46,13;

0,60,1,59,2,58,3,56,4,55,5,54。

注意到:$24m-3=(16m-3)+8m$,由定理 1 和推论 2 有如下推论。

推论 3　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{16m}\cup(2C_{8m}\cup(2C_{4m}\cup C_{8m-4}))$ 存在特征为 $32m-3$ 且缺 $48m-3$ 标号值的交错标号。

注意到:$48m-3=(32m-3)+16m$,由定理 1 和推论 3 有如下推论。

推论 4　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{32m}\cup(2C_{16m}\cup(2C_{8m}\cup(2C_{4m}\cup C_{8m-4})))$ 存在特征为 $64m-3$ 且缺 $96m-3$ 标号值的交错标号。

重复上述过程,可以构造出许多交错图。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 2 和引理 1 有如下推论。

推论 5　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{4m}\cup C_{24m-8}$ 存在缺 $20m-5$ 标号值的优美标号。

例 3　当 $m=2$ 时,非连通图 $2C_8\cup C_{40}$ 缺 35 标号值的优美标号为:

23,29,24,32,25,28,26,27;

20,34,21,33,22,31,46,30

0,56,1,55,2,54,3,53,4,52,5,51,6,50,7,49,8,48,9,47,10,45,11,44,12,43,13,42,14,41,15,40,16,39,17,38,18,37,19,36。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 3 和引理 1 有如下推论。

推论 6　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{4m}\cup C_{24m-4}$ 存在缺 $12m-2$ 标号值的优美标号。

例 4　当 $m=2$ 时,非连通图 $2C_8\cup C_{44}$ 缺 22 标号值的优美标号为:

26,32,27,35,28,31,29,30;

23,37,24,36,25,34,49,33

0,60,1,59,2,58,3,57,4,56,5,55,6,54,7,53,8,52,9,51,10,50,11,48,12,47,13,46,14,45,15,44,16,43,17,42,18,41,19,40,20,39,21,38。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 4 和引理 1 有如下推论。

推论 7　对任意正整数 m,非连通图 $2C_4m\cup C_{24m-4}$ 存在缺 $14m-3$ 标号值的优美标号。

例 5　当 $m=2$ 时,非连通图 $2C_8\cup C_{44}$ 缺 25 标号值的优美标号为:

37,22,36,23,34,24,33,49;

26,32,27,35,28,31,29,30;

0,60,1,59,2,58,3,57,4,56,5,55,6,54,7,53,8,52,9,51,10,50,11,48,12,47,13,46,14,45,15,44,16,43,17,42,18,41,19,40,20,39,21,38。

注意到:$3n=(2n-1)+n+1$,由定理 5 和引理 1 有如下推论。

推论 8　对任意正整数 m,非连通图 $2C_{4m}\cup C_{24m}$ 存在缺 $18m-1$ 标号值的优美标号。

例 6　当 $m=2$ 时,非连通图 $2C_8\cup C_{48}$ 缺 35 标号值的优美标号为:

39,24,38,26,37,27,36,52;

34,28,33,25,32,29,31,30;

0,64,1,63,2,62,3,61,4,60,5,59,6,58,7,57,8,56,9,55,10,54,11,53,12,51,13,50,14,49,15,48,16,47,17,46,18,45,19,44,20,43,21,42,22,41,23,40。

参考文献:

[1]　马克杰.优美图[M].北京:北京大学出版社,1991.

[2]　董俊超.$C_{4k}\cup C_{4k}\cup C_m$ 的优美性[J].烟台大学学报:自然科学与工程版,1999,12(4):238-241.

[3]　吴跃生,王广富,徐保根.非连通图 $2C_{4m}\cup G$ 的优美标号[J].烟台大学学报:自然科学与工程版,2014,27(4):240-243.

(责任编校:夏玉玲)