静电场电势零点选取原则的讨论

边　静

（唐山学院 基础教学部，河北 唐山 063000）

摘要：运用解析法推证了物理学中静电场电势零点选取的通用原则，提出并证明了场源电荷分布在无限空间时也可以选无限远为电势零点的条件。

关键词：静电场；电势零点；解析法；选取原则

中图分类号：O441.1　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2014)06－0022－02

On Selection Principle of Zero Potential in the Electrostatic Field

BIAN Jing

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan college, Tangshan 063000, China)

Abstract: The author of this paper employs the analytical method to propose and prove the general rules for the selection of the electrostatic field potential zero in physics and conditions on which infinity can be chosen as the zero potential point when field source charge is distributed in infinite space.

Key Words: electrostatic field; electric potential zero; analytical method; selection principle

电势是静电学中的一个重要问题，它反映了电场具有能量的性质。在物理学中静电场电势零点选取具有任意性。但一般情况下，对于场源电荷分布在有限空间内的静电场的电势零点选在无限远处；场源电荷分布在无限空间内的静电场的电势零点选在有限远处。

1　电势零点选取具有任意性

从物理学角度看，电势是一个相对量，参考点不同，各点的电势不同。参考点改变，虽然要影响场中各点的电势值，但并不改变电场。正因为不同的电势可以描述同一电场，所以物理学上允许电势零点选择的任意性[1]。

从数学角度看，根据电势的定义，$U=\int_{P}^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P}^{P_0'}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+U_0$，$U$ 表示电场中某点的电场强度，可知当电势参考零点从 P_0 变到 P_0' 时，各点的电势同时改变一个常数 $U_0=\int_{P_0'}^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，但并不影响电场的分布。以电荷量为 Q 的正点电荷在真空中的静电场为例，以无限远处为电势零点，电势分布函数为 $U(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，$Q$ 为点电荷带电量，r 为场点到点电荷的距离，ε_0 为真空的电容率。画出该函数图像如图 1 所示。根据电场强度与电势梯度的关系 $\boldsymbol{E}=-\nabla(U+U_0)$，零点选取的不同，只是 $U\sim r$ 图像横坐标轴上下平移一定距离（或者说 $U\sim r$ 图像沿 U 轴上下平移），并不影响曲线的斜率，而 $\boldsymbol{E}=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=-\frac{\mathrm{d}(U+U_0)}{\mathrm{d}r}$，各点的斜率不变决定着空间各点的场强不变，所以，不同的电势可以描述同一电场。正因为如此，物理学上规定允许电势零点的选择具有任意性。

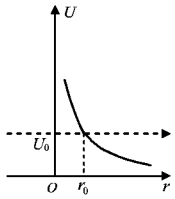

图 1　电势分布函数图像

2　场源电荷的分布规律对电势零点选取的影响

虽然原则上电势零点的选择是任意的，但不是完全不受限制。为了能够用电势来描述场在各点的特性，它应满足这样的条件，即零点选定后，必须使场中各点的电势具有确定值才有物理意义。

2.1　场源电荷分布在有限空间

一般说来，一定带电体系所决定的电场，其场强 $\boldsymbol{E}$ 是场点的函数，一般可写成 $\boldsymbol{E}=K\frac{1}{r^m}\boldsymbol{e}_r$，式中 K 是与场源电荷分布情况、场源电荷的电量大小及选择的单位有关的比例系

收稿日期：2014－04－10

作者简介：边静（1979－），女，河北唐山人，讲师，硕士，主要从事大学物理教学研究。

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn

数，r 是场点至带电体或带电体系中心的距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是沿 r 方向的单位矢量，m 为整数。

电势零点选在无限远时，场中任意一点 P 的电势应表示为

$$U=\int_P^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=K\int_r^{\infty}\frac{1}{r^m}\mathrm{d}r=K\left.\frac{r^{1-m}}{1-m}\right|_r^{\infty},$$

只有当 $m>1$ 时，上式的积分结果才具有确定值，所表示的电势才有物理意义。

带电体系分布在有限空间时，它相当于一系列位于原点的点电荷 $\sum dq$，电偶极子 $\sum dq\boldsymbol{r}$，电四极子激发的电场[2]，而点电荷的场 $m=2$，电偶极子 $m=3$，电四极子 $m=4$，都是大于 1 的，所以分布在有限区域的电荷通常选无限远为电势零点。

2.2　场源电荷分布在无限空间

当场源电荷分布到无限空间时，是否就不可以选无限远为电势零点呢？例如，一根无限长带电直线，电荷线密度为 λ，求离其轴线 r 处的电势。

根据高斯定理，可知无限长带电导线外的场强公式是 $\boldsymbol{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r$，$r$ 为场点至带电直线的垂直距离，$\boldsymbol{e}_r$ 是沿 r 方向的单位矢量。如果选无限远为电势零点，根据电势的定义

$$U(r)=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_r^{\infty}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ln r\,\Big|_r^{\infty}\to\infty,$$

积分发散，各点的电势均为无限大，无物理意义。

又如无限大带电平面外的电场，电场强度为 $\boldsymbol{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 为平面法线方向的单位矢量。选无穷远处为电势零点，把电场强度沿平面法线方向积分，得电势为

$$U=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\Big|_r^{\infty}\to\infty,$$

即各点的电势也为无限大，无物理意义。

从以上的例子我们是否就可以得出这样的结论：当场源电荷分布在无限空间时就不能选无限远处为电势零点？这不能一概而论。若电荷为球对称分布至无限远处，电荷体密度分布满足

$$\rho(r)=\begin{cases}0 & (r\leqslant\delta)\\ \rho_0\dfrac{1}{r^n} & (\delta\leqslant r\leqslant\infty)\end{cases},$$

其中，r 为场点距球对称中心的距离，ρ_0 为一常数，n 为正实数，δ 为一正的小量，此时可以选择无限远处为电势零点。推证如下。

由高斯定理知，距球对称中心为 r 处的场强，当 $n=3$ 时，

$$\oiint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\mathrm{d}V=\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_\delta^r\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}r=4\pi\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\ln\frac{r}{\delta},$$

$$E=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\ln\frac{r}{\delta}。$$

当 $n\neq3$ 时，

$$\oiint\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V\rho\mathrm{d}V=\frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0}\int_\delta^r\frac{1}{r^{n-2}}\mathrm{d}r=4\pi\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{-(n-3)}\frac{1}{r^{n-3}}\Big|_\delta^r,$$

$$E=\frac{1}{(n-3)}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2\delta^{n-3}}-\frac{1}{r^{n-1}}\right)。$$

如果取无限远的电势为零，则场中距离球对称中心为 r_P 的 P 点处的电势，当 $n=3$ 时为

$$U=\int_{r_P}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_P}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{r_P}^{\infty}\frac{1}{r^2}\ln\frac{r}{\delta}\mathrm{d}r=\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{1}{r_P}\left(1+\ln\frac{r_P}{\delta}\right),$$

当 $n\neq3$，且 $n>2$ 时，

$$U=\int_{r_P}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{r_P}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{n-3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\int_{r_P}^{\infty}\left(\frac{1}{r^2\delta^{n-1}}-\frac{1}{r^{n-1}}\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{n-3}\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 r_P}\left(\frac{1}{\delta^{n-3}}-\frac{1}{(n-2)r_P^{n-2}}\right)。$$

可见当 $n>2$ 时，可取无限远处的电势为零（因为当 $n\leqslant2$ 时 $\int_{r_P}^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 发散；当 $n>2$ 时，该广义积分收敛）。

由高等数学知识可知，如果电荷体密度函数 $\rho(r)$ 当 $r\to\infty$ 时，较 $\frac{1}{r^2}$ 为高阶无穷小，则以无限远为电势零点，计算 U 值的积分结果就必然收敛，各处电势就有确定数值，具有物理意义。即电荷体密度分布满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\rho(r)}{\frac{1}{r^2}}=\lim\limits_{r\to\infty}r^2\rho(r)=0$ 的静电场是可以取无穷远处为电势零点的。

例如，有一体系电荷体密度函数为 $\rho(r)=\rho_0\mathrm{e}^{-\alpha r}$，$\alpha$ 为一正的常量。经计算 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\rho(r)}{\frac{1}{r^2}}=\lim\limits_{r\to\infty}\frac{r^2}{\rho_0\mathrm{e}^{-\alpha r}}=0$，因此可取无限远处为零电势点。

3　结论

综上所述，静电场电势零点的选取原则为：

(1) 场源电荷分布在有限空间，通常选取无限远处为电势零点；

(2) 场源电荷分布在无限空间，当电荷体密度分布函数 $\rho(r)$ 满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{\rho(r)}{\frac{1}{r^2}}\to0$ 的球对称无限分布场，可取无穷远处为电势零点。其它电荷分布在无限远处的情况只能选有限远处电势为零。

参考文献：

[1]　马文蔚. 物理学[M]. 北京：高等教育出版社，2006：176－177.

[2]　梁灿彬，秦光戎，梁竹健. 电磁学[M]. 北京：高等教育出版社，1980：125－133.

（责任编校：夏玉玲）

PDF 文件使用 "pdfFactory Pro" 试用版本创建 www.fineprint.cn