第 27 卷第 6 期 唐山学院学报 Vol. 27 No. 6
2014 年 11 月 Journal of Tangshan College Nov. 2014

矩阵分块法的应用

郝玉芹

(唐山学院 基础教学部,河北 唐山 063000)

摘要: 利用矩阵分块法理论给出了《线性代数》中几个命题的证明,指出矩阵分块法是矩阵证明题中较简捷高效的方法。

关键词: 矩阵;分块法;矩阵证明

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-349X(2014)06-0016-02

Application of Partitioned Matrix

HAO Yu-qin

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

Abstract: In this paper, the theory of partitioned matrix is employed to prove several propositions in linear algebra, which indicates that the method of partitioned matrix is a simple and efficient approach to matrix proof problems.

Key Words: matrix; partitioning method; matrix proof

《线性代数》大都介绍了矩阵分块法理论,但对其应用却涉及较少。本文将利用矩阵分块法理论对矩阵进行分块,或构造相关的分块矩阵,探讨此理论在解题中的应用。

1 利用矩阵分块法证明矩阵有相同的特征值

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特征根。

证明 设 $\lambda\neq 0$,以 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times m},\boldsymbol{E}_n,\lambda\boldsymbol{E}_m$ 为子分块构造矩阵 $\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \boldsymbol{B}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$,并用分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{N}$,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \boldsymbol{B}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}。\tag{1}$$

再用 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{N}$,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O}\\ -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}_{m\times n}\\ \boldsymbol{B}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\end{bmatrix}。\tag{2}$$

(1)式与(2)式等号两边分别取行列式后的两式左端相等,从而右端也相等,即

$$\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{E}_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\end{vmatrix},$$

也即 $|\lambda\boldsymbol{E}_m-\boldsymbol{AB}|=\lambda^m\left|\boldsymbol{E}_n-\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{BA}\right|=\lambda^{m-n}|\lambda\boldsymbol{E}_n-\boldsymbol{BA}|$。

由此可知,矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 的特征多项式相差一个 λ^{m-n} 因子,因而矩阵 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 非零特征值相同。证毕。

2 利用矩阵分块法证明二次型的正定性

例 2 如果二次型 $f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AX}$ 是正定二次型,那么 $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}$ 是负定二次型,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}。$$

证明 以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{O}$ 为子块构造分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,并用分块矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times 1}\\ -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_1\end{bmatrix}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{C}$,有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times 1}\\ -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O}_{1\times n} & -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\end{bmatrix}。$$

当 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{O}$ 时,两边取行列式有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times 1}\\ -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O}_{1\times n} & -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}\end{vmatrix},$$

收稿日期: 2014-05-27

作者简介: 郝玉芹(1958—),女,河北唐山人,副教授,主要从事高等数学应用研究。

左端为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times 1} \\ -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{E}_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix} = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

右端为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{O}_{1\times n} & -\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X} \end{vmatrix} = (-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})|\boldsymbol{A}|$。

即 $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})|\boldsymbol{A}|$。

由已知 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以 $|\boldsymbol{A}| \succ 0$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值全为正，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的特征值也全为正，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 也正定，即 $f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X})|\boldsymbol{A}| \prec 0$，所以，$f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$ 是负定二次型。证毕。

下面两个命题是《线性代数》中常见的命题，本文将用矩阵分块法证明它们。

3　利用矩阵分块法证明行列式相等

例 3　设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是任意 n 阶矩阵，则 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$[1]。

证明　以 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$，$n$ 阶零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 以及 n 阶单位矩阵的负就矩阵 $-\boldsymbol{E}$ 构造分块矩阵 $\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，并用分块矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{M}$，有 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$。

两边取行列式有 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$。

上式左边为 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，右边应用 Laplace 定理[2]选取 $n+1 \sim 2n$ 列展开得到：

$|\boldsymbol{AB}|(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|-\boldsymbol{E}| = |\boldsymbol{AB}|(-1)^{2n(n+1)} = |\boldsymbol{AB}|$。

即 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。证毕。

4　利用矩阵分块法证明矩阵秩的关系式

例 4　设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵，则 $R(\boldsymbol{AB}) \geqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n$。

证明　以 $\boldsymbol{A}_{m\times n}, -\boldsymbol{B}_{n\times s}, \boldsymbol{E}_n, \boldsymbol{O}_{m\times s}$ 为子块构造分块矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix}$，并且用分块矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{Q}$，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix}。$$

再用 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}_{n\times s} \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} & \boldsymbol{E}_s \end{bmatrix}$ 右乘上式，有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}_{n\times s} \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} & \boldsymbol{E}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{AB}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}_{n\times s} \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} & \boldsymbol{E}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{AB}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times s} \end{bmatrix}。$$

即 $R[\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}_{n\times s} \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} & \boldsymbol{E}_s \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{AB}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times s} \end{bmatrix}$。

又由于 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}_{m\times n} \\ \boldsymbol{O}_{n\times m} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B}_{n\times s} \\ \boldsymbol{O}_{s\times n} & \boldsymbol{E}_s \end{bmatrix}$ 均为可逆阵，所以，$R\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{AB}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times s} \end{bmatrix}$。

又由于 $R\begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{AB}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times s} \end{bmatrix} = R(\boldsymbol{AB}) + n$，且 $R\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{m\times n} & \boldsymbol{O}_{m\times s} \\ \boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}_{n\times s} \end{bmatrix} \geqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$，所以，$R(\boldsymbol{AB}) + n \geqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$。

即 $R(\boldsymbol{AB}) \geqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) - n$。证毕。

5　结语

通过对《线性代数》中几个命题的证明可以看出，借助矩阵分块法这个重要工具，可以简化矩阵证明题的证明过程，突显了此方法在矩阵证明过程中简捷高效的特点，体现了矩阵分块法这一工具的实用价值。

参考文献：

[1]　同济大学数学系. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，2007.

[2]　华中理工大学数学系. 线性代数[M]. 北京：高等教育出版社，1999.

（责任编校：夏玉玲）

（上接第 15 页）

参考文献：

[1]　同济大学数学系. 高等数学：上册[M]. 6 版. 北京：高等教育出版社，2007：136.

[2]　刘玉琏. 数学分析讲义[M]. 北京：高等教育出版社，2004：212－213.

[3]　王海玲. 微分中值定理的推广及应用[J]. 长春理工大学学报，2003(3)：81－85.

（责任编校：夏玉玲）