应用中值定理验证中值等式的实例分析

汲守峰

（唐山学院 基础教学部，河北 唐山 063000）

摘要：应用介值定理、微分中值定理和积分中值定理讨论了中值的存在性，并利用单调性或反证法讨论了中值的唯一性。

关键词：微分中值定理；积分中值定理；中值等式

中图分类号：O172　**文献标志码**：A　**文章编号**：1672－349X(2014)06－0014－02

A Case Study of Application of Mean Value Theorem to Prove Mean Value Equality

JI Shou-feng

(Department of Fundamental Science Teaching, Tangshan College, Tangshan 063000, China)

Abstract: On the basis of intermediate value theorem, differential mean value theorem and integral mean value theorem, the author of this paper discusses the existence of the mean value, and the uniqueness of the mean value through monotonicity and reduction to absurdity.

Key Words: differential mean value theorem; integral mean value theorem; mean value equality

应用中值定理验证中值等式是高等数学中的重点内容，同时也是教学难点。内容主要涉及连续函数的介值定理（零点定理）和微分中值定理，包括费马定理、罗尔定理（广义罗尔中值定理）、拉格朗日定理、柯西定理[1]、泰勒定理及积分中值定理。另外，利用函数的单调性也可以讨论与中值有关的问题。一般来说，讨论中值的存在性需要用到介值定理、微分中值定理和积分中值定理；讨论唯一性通常利用函数的单调性或反证法，微分中值定理和积分中值定理有时还可以用来求函数极限。以下将通过几个典型的例题进行分析。

1　利用广义罗尔中值定理证明中值等式

例 1　设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且可微，$f(0)=1$，$f(x)\leqslant e^{-x}$，求证存在一点 x_0，使得 $f(x_0)=-e^{-x_0}$。

证明　首先证明广义罗尔中值定理。

设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$（或 $(-\infty,a]$）上连续，在 $(a,+\infty)$（或 $(-\infty,a)$）内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$（或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=f(a)$），则至少存在一点 $\xi\in(a,+\infty)$（或 $\xi\in(-\infty,a)$），使得 $f'(\xi)=0$[1]。

仅在区间 $[a,+\infty)$ 给出证明。

若 $f(x)=f(a)$，$x\geqslant a$ 时结论显然成立。

设 $x_0>a$，$f(x_0)\neq f(a)$（不妨设 $f(x_0)>f(a)$ 时），由连续函数介值定理及 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且等于 $f(a)$ 可知，存在 $x_1(x_1\in(a,x_0))$ 与 $x_2(x_2>x_0)$，使得

$$f(x_1)=f(x_2)=\frac{f(a)+f(x_0)}{2}。$$

函数 $f(x)$ 当 $x>a$ 时可导，对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上应用罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$。

本例中，设 $g(x)=f(x)-e^{-x}$，由 $f(x)$ 连续且可导知 $g(x)$ 也连续可导，且 $g(0)=f(0)-e^{-0}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，由广义罗尔中值定理知，存在 $x_0\in(a,+\infty)$，使得 $g'(x_0)=f'(x_0)+e^{-x_0}=0$，即 $f(x_0)=-e^{-x_0}$.

2　利用微分中值定理证明中值等式

例 2　设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，$f'(0)+[f'(0)]^2=4$，证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f(x_0)+f''(x_0)=0$。

证明　由拉格朗日中值定理可知，存在 $x_1\in(-2,0)$，$x_2\in(0,2)$，使得

$$f(0)-f(-2)=2f'(x_1),f(2)-f(0)=2f'(x_2)。$$

因为 $|f(x)|\leqslant 1$，所以

收稿日期：2014－06－27

作者简介：汲守峰（1985—），男，河北唐山人，讲师，硕士，主要从事应用数学研究。

$$|f'(x_1)| = \frac{|f(0)-f(-2)|}{2} \leqslant 1,$$

$$|f'(x_2)| = \frac{|f(2)-f(0)|}{2} \leqslant 1。$$

令 $g(x) = f^2(x) + [f'(x)]^2$，则 $|g(x_1)| \leqslant 2$，$|g(x_2)| \leqslant 2$，因为 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，且 $g(0)=4$，若设 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上的最大值 $g(x) \geqslant 4$，显然，$g(x)$ 取最大值的点在 (x_1,x_2) 内，即 $g(x_0) = \max\limits_{x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2} g(x)$，又 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上可导，由费马定理可得 $g'(x_0)=0$，即

$$g'(x_0) = 2f'(x_0)[f(x_0)+f''(x_0)] = 0。$$

由于 $g(x) \geqslant 4$，可知 $f'(x_0) \neq 0$（若不然，$f'(x_0)=0$，则有 $g(x_0) = f^2(x_0) \geqslant 4 \Rightarrow |f(x_0)| \geqslant 2$，与 $|f(x)| \leqslant 1$ 矛盾），于是 $f(x_0)+f''(x_0)=0$，$x_0 \in (-2,2)$。

例 3　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在二阶导数，且 $g''(x) \neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。则以下结论成立：(1) $g(x) \neq 0$，$x \in (a,b)$；(2) 存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

证明　(1) 若存在 $c \in (a,b)$，$g(c)=0$，由罗尔中值定理可知，存在 $c_1 \in (a,c)$，$c_2 \in (c,b)$，使得 $g'(c_1)=g'(c_2)=0$，再由 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，对 $g'(x)$ 由罗尔中值定理可知，存在 $\eta \in (c_1,c_2)$，使 $g''(\eta)=0$，这与 $g''(x) \neq 0$ 矛盾，故特设成立。

(2) 令 $h(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$，由 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 内存在二阶导数，所以 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导。又 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，则 $h(a)=h(b)=0$。

由罗尔中值定理可知，存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $h'(\xi) = f''(\xi)g(\xi) - g''(\xi)f(\xi) = 0$，由 (1) 及 $g''(x) \neq 0$，得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)} = \dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$。

例 2 和例 3 的证明除了对微分中值定理能够熟练运用外，根据题意构造函数也是非常关键的一个环节，构造的函数既要符合在区间上连续与可导的性质，还要求其一阶导数能与结论中的函数相吻合。一般来讲，可直接根据结论构造函数，也有部分题目中并未明确构造的函数类型，构造辅助函数时需要一定的技巧，但也有规律可循。

3　利用积分中值定理证明中值等式

例 4　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(1) = c\int_0^{\frac{1}{c}} xe^{1-x}f(x)dx \ (c>1)$，证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$。

证明　对 $c\int_0^{\frac{1}{c}} xe^{1-x}f(x)dx$ 使用积分中值定理可知，存在 $a \in \left[0,\frac{1}{c}\right]$ 使得 $f(1) = ae^{1-a}f(a)c\left(\frac{1}{c}-0\right) = ae^{1-a}f(a)$，令 $g(x) = xe^{1-x}f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $g(1)=f(1)=g(a)$，由罗尔中值定理可知，至少存在一点 $\xi \in (a,1) \subset (0,1)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $e^{1-\xi}f(\xi) - \xi e^{1-\xi}f(\xi) + \xi e^{1-\xi}f'(\xi) = 0$。

因为 $e^{1-\xi} \neq 0$，所以 $f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$。

利用积分中值定理去验证中值等式时，也可以用积分中值定理的推广形式[3]：

函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，而在 $x=a$ 及 $x=b$ 为第一类间断点，或只有一个第一类间断点而另一间断点是连续点，则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$。

4　利用单调性或反证法讨论中值的唯一性

例 5　设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，证明 $f(x)$ 的任何两个不同的零点之间一定有函数 $f(x)+f'(x)$ 的一个零点，并由此证明方程 $(x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1} = 0$ 在 $(1,3)$ 内有且仅有一个实根。

证明　假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上任意两个不同的零点为 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$，即 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由 $f(x)+f'(x)=0$，解该微分方程得 $f(x) = Ce^{-x}$（C 为任意常数），构造函数令 $g(x) = e^x f(x)$，则函数 $g(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，在 (x_1,x_2) 上可导，且 $g(x_1)=g(x_2)=0$，由罗尔定理可知，至少存在一点 $\xi \in (x_1,x_2)$，使得 $g'(\xi)=0$，即 $e^x(f(\xi)+f'(\xi))=0$，也就是 $f(\xi)+f'(\xi)=0$。

构造函数 $f(x) = (x-3)\ln(x-1)$，则 $f'(x) = \ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1}$，$f(1)=f(3)=0$，且 $f(x)$ 在 $(1,3)$ 内可导，$x_1=1$，$x_2=3$ 是 $f(x)$ 的两个零点，由前面所证结论可知，在 $(1,3)$ 内一定存在 $f(x)+f'(x) = (x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1}$ 的一个零点，即方程 $(x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1} = 0$ 在 $(1,3)$ 内至少有一个实根。

设 $g(x) = (x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1}$，则当 $x \in (1,3)$ 时，$g'(x) = \ln(x-1) + \dfrac{x-2}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} = \ln(x-1) + \dfrac{x^2-3x+4}{(x-1)^2} > 0$。

所以 $g(x)$ 在 $(1,3)$ 内严格单调递增，因此方程 $g(x)=0$ 在 $(1,3)$ 内至多有一个实根，方程 $(x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1} = 0$ 在 $(1,3)$ 内至多有一个实根。

综上所述，方程 $(x-2)\ln(x-1) + \dfrac{x-3}{x-1} = 0$ 在 $(1,3)$ 内有且仅有一个实根。

5　结语

介值定理、中值定理不仅可以用来验证中值等式，而且还可以证明一些不等式方程。验证中值的唯一性时除了单调性外还可以用反证法等方法。（下转第 17 页）

左端为 $\begin{vmatrix} E_n & O_{n\times 1} \\ -X^{T}A^{-1} & E_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & X \\ X^{T} & O \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & X \\ X^{T} & O \end{vmatrix}=$ $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

右端为 $\begin{vmatrix} A & X \\ O_{1\times n} & -X^{T}A^{-1}X \end{vmatrix}=(-X^{T}A^{-1}X)|A|$。

即 $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-X^{T}A^{-1}X)|A|$。

由已知 A 正定，所以 $|A|\succ 0$，A 的特征值全为正，从而 A^{-1} 的特征值也全为正，A^{-1} 也正定，即 $f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(-X^{T}A^{-1}X)|A|\prec 0$，所以，$f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} A & X \\ X^{T} & O \end{vmatrix}$ 是负定二次型。证毕。

下面两个命题是《线性代数》中常见的命题，本文将用矩阵分块法证明它们。

3　利用矩阵分块法证明行列式相等

例 3　设 A,B 是任意 n 阶矩阵，则 $|AB|=|A||B|$[1]。

证明　以 n 阶矩阵 A,B，n 阶零矩阵 O 以及 n 阶单位矩阵的负就矩阵 $-E$ 构造分块矩阵 $M=\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix}$，并用分块矩阵 $\begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}$ 右乘矩阵 M，有 $\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & B \\ O & E \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & AB \\ -E & O \end{bmatrix}$。

两边取行列式有 $\begin{vmatrix} A & O \\ -E & B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E & B \\ O & E \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & AB \\ -E & O \end{vmatrix}$。

上式左边为 $|A||B|$，右边应用 Laplace 定理[2]选取 $n+1\sim 2n$ 列展开得到：

$|AB|(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|-E|=|AB|(-1)^{2n(n+1)}=|AB|$。

即 $|AB|=|A||B|$。证毕。

4　利用矩阵分块法证明矩阵秩的关系式

例 4　设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则 $R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$。

证明　以 $A_{m\times n}$，$-B_{n\times s}$，E_n，$O_{m\times s}$ 为子块构造分块矩阵 $Q=\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}$，并且用分块矩阵 $\begin{bmatrix} E_m & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{bmatrix}$ 左乘矩阵 Q，有

$$\begin{bmatrix} E_m & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}。$$

再用 $\begin{bmatrix} E_n & B_{n\times s} \\ O_{s\times n} & E_s \end{bmatrix}$ 右乘上式，有

$$\begin{bmatrix} E_m & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B_{n\times s} \\ O_{s\times n} & E_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B_{n\times s} \\ O_{s\times n} & E_s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & O_{n\times s} \end{bmatrix}。$$

即 $R\left[\begin{bmatrix} E_m & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_n & B_{n\times s} \\ O_{s\times n} & E_s \end{bmatrix}\right]=R\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & O_{n\times s} \end{bmatrix}$。

又由于 $\begin{bmatrix} E_m & -A_{m\times n} \\ O_{n\times m} & E_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} E_n & B_{n\times s} \\ O_{s\times n} & E_s \end{bmatrix}$ 均为可逆阵，所以，$R\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}=R\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & O_{n\times s} \end{bmatrix}$。

又由于 $R\begin{bmatrix} O_{m\times n} & AB_{m\times s} \\ E_n & O_{n\times s} \end{bmatrix}=R(AB)+n$，且 $R\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times s} \\ E_n & -B_{n\times s} \end{bmatrix}\geqslant R(A)+R(B)$，所以，$R(AB)+n\geqslant R(A)+R(B)$。

即 $R(AB)\geqslant R(A)+R(B)-n$。证毕。

5　结语

通过对《线性代数》中几个命题的证明可以看出，借助矩阵分块法这个重要工具，可以简化矩阵证明题的证明过程，突显了此方法在矩阵证明过程中简捷高效的特点，体现了矩阵分块法这一工具的实用价值。

参考文献：

[1]　同济大学数学系．线性代数[M]．北京：高等教育出版社，2007．

[2]　华中理工大学数学系．线性代数[M]．北京：高等教育出版社，1999．

（责任编校：夏玉玲）

（上接第 15 页）

参考文献：

[1]　同济大学数学系．高等数学：上册[M]．6 版．北京：高等教育出版社，2007：136．

[2]　刘玉琏．数学分析讲义[M]．北京：高等教育出版社，2004：212－213．

[3]　王海玲．微分中值定理的推广及应用[J]．长春理工大学学报，2003(3)：81－85．

（责任编校：夏玉玲）