第 27 卷第 6 期
2014 年 11 月
唐山学院学报
Journal of Tangshan College
Vol. 27 No. 6
Nov. 2014

金融时间序列中同积向量的充分改进最小二乘估计研究

曹 潇

(西北政法大学 经济管理学院,西安 710100)

摘要:以金融时间序列中同积向量的充分改进为对象,分析充分改进的最小二乘估计。在统计量的极限分布非标准时,构造充分改进的最小二乘估计。研究表明,改进的最小二乘估计方法是一种非参数方法,有助于充分的最小二乘估计。

关键词:同积向量;充分改进;最小二乘估计

中图分类号:O224 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-349X(2014)06-0008-03

A Study on Substantial Improvement of Least Square Estimation of Co-integrating Vector in Financial Time Series

CAO Xiao

(School of Economics and Management, Northwest University of Political & Law, Xi'an 710100, China)

Abstract: Taking the substantial improvement of co-integrating vector in the financial time sesequence as research object, the author of this paper analyzes substantial improved least square estimation and constructs the substantial improved least square when the limit distribution is non-standard in statistics. The study shows that improved least square estimation is a non-parameter method that is conducive to least square estimation.

Key Words: co-integrating vector; substantial improvement; least square estimation

在金融资产价格波动研究中,同积过程$\{y_t\}$的同积向量往往是未知的,需由观察到的样本估计得到。现有文献对同积向量的最小二乘估计、估计量的极限分布和对同积向量的假设检验进行了研究[1-3],但是没有考虑矩阵$\sum_{21}$不为零时的情形,统计量$T(\hat{\gamma}_T-\gamma)$的极限分布是非标准的。本文将研究同积向量的充分改进的最小二乘估计方法,旨在克服这一困难。这一研究可以为实际的微观金融资产波动分析提供有力的工具。

1 同积向量的最小二乘估计

若n维随机向量同积,并有同积向量a,那么a可由最小二乘法一致地估计得到。为说明最小二乘法的合理性,作以下考虑。a为y_t的同积向量,因此$z_t=a'y_t$为一单变量$I(0)$的过程。

根据大数定律,有$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}z_t^2=T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(a'y_t)^2\xrightarrow{p}E(z_t^2)<\infty$。

但是,若a不是y_t的同积向量,那么$z_t=a'y_t$仍为$I(1)$变量,此时可得

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T}z_t^2=T^{-2}\sum_{t=1}^{T}(a'y_t)^2=a'\{\sum_{t=1}^{T}y_ty_t'\}a\Rightarrow a'\Lambda\{\int_0^1 W(r)W(r)'\mathrm{d}r\}\Lambda'a。\qquad(1)$$

式(1)中,T为样本量,$W(r)$是标准维纳过程,$r\in[0,1]$。令$\Lambda=\Psi(1)P$,$\Psi(L)$为无穷阶滞后多项式,Λ决定于Δy_t的自相关系数矩阵。(1)式是一正定的二次型,从而有$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}z_t^2=T(T^{-2}\sum_{t=1}^{T}z_t^2)\xrightarrow{p}+\infty$。

因此,只要y_t是同积的,并有同积向量a,以下最优问题

$$\min_{\hat{a}\in R^n}\left\{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(a'y_t)^2\right\}\qquad(2)$$

的解$\hat{a}$,即A的最小二乘估计,是同积向量的一致估计。

收稿日期:2014-08-31

基金项目:陕西省软科学研究计划项目(2014KRM18)

作者简介:曹潇(1975—),男,陕西榆林人,讲师,博士,主要从事金融工程研究。

不失一般性,设同积向量 a 有以下形式:$a = \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma_2 \\ -\gamma_3 \\ \vdots \\ -\gamma_n \end{bmatrix}$,目标函数(2)成为:$T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(a'y_t)^2 = T^{-1}\sum_{t=1}^{T}(y_{1t}-\gamma_2 y_{2t}-\cdots-\gamma_n y_{nt})^2$,它的最小值由 y_{1t} 对 $y_{it}(i=2,\cdots,n)$ 作回归取得。

同积向量的最小估计通常在同积过程的三角表示形式中进行。同积过程$\{y_t\}$的三角表示形式为:

$$\begin{cases} y_{1t} = \alpha + \gamma' y_{2t} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} = u_{2t} \end{cases}。\tag{3}$$

这里,y_{1t} 为单变量随机变量,y_{2t} 为$(n-1)$维随机向量。现有文献给出了参数 α 和 γ 的最小二乘估计。

2　充分改进的最小二乘估计

同积向量的充分改进的最小二乘估计(fully modified OLS),简称改进的 OLS。考虑同积系统的三角表示形式:

$$\begin{matrix} y_{1t} = \alpha + \gamma' y_{2t} + u_{1t} \\ \Delta y_{2t} = u_{2t} \end{matrix}。\tag{4}$$

$(u_{1t},u_{2t}')'$ 有表示形式 $\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = \Psi(L)\varepsilon_t$,其中,$\Psi(L)$ 为无穷阶滞后多项式,$\{\varepsilon_t\}$ 独立同分布,$E(\varepsilon_t)=0$,$D(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t\varepsilon_t') = \Omega = PP'$。令 $\Lambda = \Psi(1)P$,则有:

$$\sum = \Lambda\Lambda' = \Psi(1)PP'\Psi(1) = \begin{bmatrix} \sum_{11} & \sum_{21}' \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{bmatrix}。\tag{5}$$

矩阵$\sum$为非异正定,可表示为:$\sum = \begin{bmatrix} \sum_{11} & \sum_{21}' \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{bmatrix} = \sum_{v=-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} E(u_{1t}u_{1,t-v}) & E(u_{1t}u_{2,t-v}) \\ E(u_{2t}u_{1,t-v}) & E(u_{2t}u_{2,t-v}) \end{pmatrix}$,系统(3)中的参数 α 和 γ 的最小二乘估计的极限算法由文献[3-5]给出。当子矩阵$\sum_{21}$为零时,由 u_{1t} 和 u_{2t} 生成的维纳过程 $W_1(r)$ 和 $W_2(r)$ 互相独立,统计量 $T(\hat{\gamma}_T-\gamma)$ 有正态的条件极限分布。一般来说,若$\sum_{21}$不为零,$T(\hat{\gamma}_T-\gamma)$ 的极限分布是非标准的。本文研究的改进的 OLS 方法,旨在克服这一困难。

若$\sum_{21}$不为零,构造$\sum_{21}'\sum_{22}^{-1}\Delta y_{2t}$,将其从 y_{1t} 中减去,可得 $y_{1t}^{+} = y_{1t}-\sum_{21}'\sum_{22}^{-1}\Delta y_{2t}$,修改后的同积系统为 $y_{1t}^{+} = \alpha+\gamma' y_{2t}+u_{1t}^{+}$,其中 $\Delta y_{2t} = u_{2t}$,$u_{1t}^{+} = u_{1t}-\sum_{21}'\sum_{22}^{-1}\Delta y_{2t}$,随机向量 $u_{1t}^{+}[u_{1t}^{+},u_{2t}']'$ 满足 $\begin{pmatrix} u_{1t}^{+} \\ u_{2t} \end{pmatrix} = L'\begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix}$,其中的矩阵 $L' = \begin{bmatrix} 1 & -\sum_{21}'\sum_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \end{pmatrix}$,对 y_{1t}^{+} 中的参数作估计,得最小二乘估计 $\hat{\alpha}_T^{+}$ 和 $\hat{\gamma}_T^{+}$,

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_T^{+} \\ \hat{\gamma}_T^{+} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum y_{2t}' \\ \sum y_{2t} & \sum y_{2t}y_{2t}' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \sum y_{1t}^{+} \\ \sum y_{2t}y_{1t}^{+} \end{bmatrix}。$$

由此可得:

$$\begin{pmatrix} T^{1/2}(\hat{\alpha}^{+}-\alpha) \\ T(\hat{\gamma}^{+}-\gamma) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T^{-3/2}\sum y_{2t}' \\ T^{-3/2}\sum y_{2t} & T^{-2}\sum y_{2t}\sum y_{2t}' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum u_{1t}^{+} \\ T^{-1}\sum y_{2t}u_{1t}^{+} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \left\{\int_0^1 W(r)'\mathrm{d}r\right\}\Lambda' L_2 \\ L_2'\Lambda\int_0^1 W(r)\mathrm{d}r & L_2'\Lambda\left\{\int_0^1 W(r)'\mathrm{d}r\right\}\Lambda' L_2 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} L_1'\Lambda W(1) \\ L_2'\Lambda\left\{\int_0^1 W(r)[\mathrm{d}W(r)]'\right\}\Lambda' L_1 + \delta^{+} \end{bmatrix},$$

其中,$W(r)$ 为 n 维标准维纳过程,参数 δ^{+} 的表示式:

$$\delta^{+} = \sum_{v=0}^{\infty}E(u_{2t}u_{1,t+v}) = \sum_{v=0}^{\infty}E\{u_{2t}[u_{1,t+v}-\sum_{21}'\sum_{22}^{-1}u_{2,t+v}]\} = \sum_{v=0}^{\infty}E\{u_{2t}[u_{1,t+v},u_{2,t+v}']\}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sum_{22}^{-1}\sum_{21} \end{bmatrix}。$$

定义维纳过程 $B(r)$ 为:$B(r) = \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \end{pmatrix}\Lambda W(r) = \begin{pmatrix} L_1'\Lambda W(r) \\ L_2'\Lambda W(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(r) \\ B_2(r) \end{pmatrix}$,$B_1(r)$ 和 $B_2(r)$ 分别为 1 维和 $n-1$ 维的维纳过程。因为

$$E\{B(1)B(1)'\} = \begin{pmatrix} L_1' \\ L_2' \end{pmatrix}\Lambda\Lambda'[L_1,L_2] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sum_{21}'\sum_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sum_{11} & \sum_{21}' \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0' \\ -\sum_{22}^{-1}\sum_{21} & I_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1^{+2} & 0' \\ 0 & \sum_{22} \end{bmatrix}。$$

所以维纳过程 $B_1(r)$ 和 $B_2(r)$ 是互相独立的。上式中的 δ_1^{+2} 为:$\delta_1^{+2} = \sum_{11}-\sum_{21}'\sum_{22}^{-1}\sum_{21}$。

令$\sum_{22} = P_{22}^{+}P_{22}^{+}{}'$,可将维纳过程 $B(r)$ 写成:$B(r) = \begin{pmatrix} B_1(r) \\ B_2(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{+} & 0' \\ 0 & P_{22}^{+} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_1^{+}(r) \\ W_2^{+}(r) \end{pmatrix}$。

其中的 $W_1^{+}(r)$ 和 $W_2^{+}(r)$ 分别为 1 维和 $n-1$ 维互相独立的标准维纳过程。由此,可进一步将$[T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{+}-\alpha),T(\hat{\gamma}_T^{+}-\gamma)']'$的极限写成下列形式:

$$\begin{pmatrix} T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{+}-\alpha) \\ T(\hat{\gamma}_T^{+}-\gamma) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}' \\ P_{22}^{+}\int_0^1 W_2^{+}(r)\mathrm{d}r & P_{22}^{+}\left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)W^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}' \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{+}W_1^{-}(1) \\ P_{22}^{+}\left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)[\mathrm{d}W_1^{+}(r)]\sigma_1^{+}\right\}+\sigma^{+} \end{bmatrix}。$$

式中的 $W_1^{+}(r)$ 和 $W_2^{+}(r)$ 为互相独立的标准维纳过程。若 $\delta^{+}=0$，给定维纳过程 $W_2^{+}(r)$，$T(\hat{\gamma}_T^{+}-\gamma)$ 就有正态的条件极限分布。以下对未知参数 δ^{+} 作一致估计，然后将其从 $T(\hat{\gamma}_T^{+}-\gamma)$ 中减去，这样就完成了对最小二乘估计 $\hat{\alpha}_T$ 和 $\hat{\gamma}_T$ 的充分改进。

方差矩阵 $\sum$ 可由下式

$$\hat{\sum}=\begin{bmatrix}\hat{\sum}_{11} & \hat{\sum}_{11}' \\ \hat{\sum}_{21} & \hat{\sum}_{22}\end{bmatrix}=\hat{\Gamma}_0+\sum_{v=1}^{q}\left(1-\frac{v}{q+1}\right)(\hat{\Gamma}_v+\hat{\Gamma}_v') \quad (6)$$

估计。统计量 $\hat{\Gamma}_v$ 由式 $\hat{\Gamma}_0=T^{-1}\sum\limits_{i=v+1}^{T}\begin{pmatrix}(\hat{u}_{1t}\hat{u}_{1,t-v}) & (\hat{u}_{1t}\hat{u}_{2,t-v}) \\ (\hat{u}_{2t}\hat{u}_{1,t-v}) & (\hat{u}_{2t}\hat{u}_{2,t-v})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{\Gamma}_v^{11} & \hat{\Gamma}_v^{12} \\ \hat{\Gamma}_v^{21} & \hat{\Gamma}_v^{22}\end{pmatrix}$ 给出。式中的 $\hat{u}_{1t}$ 是 y_{1t} 对常数项和 y_{2t} 的回归残差，$\hat{u}_{2t}=\Delta y_{2t}$。由于参数 δ^{+} 有表示式：$\delta^{+}=\sum\limits_{v=0}^{\infty}\begin{pmatrix}u_{1t} & u_{2,t-v}' \\ u_{2t} & u_{2,t-v}'\end{pmatrix}'\begin{bmatrix}1 \\ -\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\end{bmatrix}=\sum\limits_{v=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\Gamma_v^{12} \\ \Gamma_v^{22}\end{pmatrix}'\begin{bmatrix}1 \\ -\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\end{bmatrix}$，可以构造参数 δ^{+} 的一致估计量 $\hat{\delta}^{+}=\sum\limits_{v=0}^{q}\left\{1-\frac{v}{q+1}\right\}(\hat{\Gamma}_v^{12}{}',\hat{\Gamma}_v^{22}{}')\begin{bmatrix}1 \\ -\hat{\sum}_{22}^{-1}\hat{\sum}_{21}\end{bmatrix}$。然后再将 $T\hat{\delta}^{+}$ 从估计量 $\hat{\gamma}_T$ 中减去，就可得充分改进的最小二乘估计 $\hat{\alpha}_T^{++}$ 和 $\hat{\gamma}_T^{++}$：

$$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_T^{++} \\ \hat{\gamma}_T^{++}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}T & \sum y_{2t}' \\ \sum y_{2t} & \sum y_{2t}y_{2t}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum \hat{y}_{1t} \\ \sum y_{2t}\hat{y}_{1t}^{+}-T\hat{\delta}^{+}\end{bmatrix},$$

其中 $\hat{y}_{1t}^{+}=y_{1t}-\hat{\sum}_{21}'\hat{\sum}_{22}^{-1}\Delta y_{2t}$。

3 结论

综上分析，构造充分改进的最小二乘估计 $\hat{\alpha}_T^{++}$ 和 $\hat{\gamma}_T^{++}$ 需要采取以下步骤：先以 y_{1t} 对常数和 y_{2t} 作回归，取得残差 $\hat{u}_{1t}$；然后用 $\hat{u}_{1t}$ 和 $\hat{u}_{2t}$ 构造估计量 $\hat{\Gamma}_v$ 和 $\hat{\sum}$；对 y_{1t} 作调整，$\hat{y}_{1t}^{+}=y_{1t}-\hat{\sum}_{21}'\hat{\sum}_{22}^{-1}\Delta y_{2t}$；计算 $\hat{\delta}^{+}$；最后用 $\hat{y}_{1t}^{+}$ 对常数和 y_{2t} 作回归，并将 $T\hat{\delta}^{+}$ 从 $(\sum y_{2t}\hat{y}_{1t}^{+})$ 中减去。

根据上述分析，$\hat{\alpha}_T^{++}$ 和 $\hat{\gamma}_T^{++}$ 均为一致估计量，$T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{++}-\alpha)$ 和 $T(\hat{\gamma}_T^{++}-\gamma)$ 有极限：

$$\begin{pmatrix}T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{++}-\alpha) \\ T(\hat{\gamma}_T^{++}-\gamma)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & T^{-3/2}\sum y_{2t}' \\ T^{-3/2}\sum y_{2t} & T^{-3/2}\sum y_{2t}y_{2t}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}T^{-1/2}\sum \hat{u}_{1t}^{+} \\ T^{-1}\sum y_{2t}\hat{u}_{1t}^{+}-\hat{\delta}\end{bmatrix}\Rightarrow\sigma_1^{+}\begin{pmatrix}V_1 \\ V_2\end{pmatrix},$$

其中的 V_1 和 V_2 为：

$$\begin{pmatrix}V_1 \\ V_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}' \\ P_{22}^{+}\int_0^1 W_2^{+}(r)\mathrm{d}r & P_{22}^{+}\left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)W^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}'\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix}W_1^{+}(1) \\ P_{22}^{+}\left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)[\mathrm{d}W_1^{+}(r)]\right\}\end{bmatrix},$$

$W_1^{+}(r)$ 和 $W_2^{+}(r)$ 为互相独立的维纳过程，在 $W_2^{+}(r)$ 给定时，$[V_1,V_2']'$ 有期望为零的正态条件分布，记为：$\left(\begin{matrix}V_1 \\ V_2\end{matrix}\middle| W_2^{+}(r)\right)\sim N\left(\begin{pmatrix}0 \\ 0\end{pmatrix},H^{-1}\right)$，矩阵 $\boldsymbol{H}$ 为：

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1 & \left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}' \\ P_{22}^{+}\int_0^1 W_2^{+}(r)\mathrm{d}r & P_{22}^{+}\left\{\int_0^1 W_2^{+}(r)W_2^{+}(r)'\mathrm{d}r\right\}P_{22}^{+}{}'\end{bmatrix},$$

$[T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{++}-\alpha),T(\hat{\gamma}_T^{++}-\gamma)']'$ 的正态极限分布是进一步对同积向量作假设检验的基础，由此构造的二次型 mQ 就有 $x^2(m)$ 的极限分布。未知参数 σ_1^{+} 可由 $\hat{\alpha}_1^{+}=\sqrt{\hat{\sum}_{11}-\hat{\sum}_{22}^{-1}\hat{\sum}_{21}}$ 一致地估计。其中的估计量 $\hat{\sum}_{11}$，$\hat{\sum}_{21}$ 和 $\hat{\sum}_{22}$ 由(6)式给出。基于 $[T^{1/2}(\hat{\alpha}_T^{++}-\alpha),T(\hat{\gamma}_T^{++}-\gamma)']'$ 的极限分布，可以构造检验假设 $H_0:R\gamma=d$ 的二次型

$$mQ=(R\hat{\gamma}_T^{++}-d)'\left\{(\hat{\sigma}_1^{+})^2[0,R]\begin{bmatrix}T & \sum y_{2t}' \\ \sum y_{2t} & \sum y_{2t}y_{2t}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0' \\ R'\end{pmatrix}\right\}^{-1}\times$$

$(R\hat{\gamma}_T^{++}-d)$，当假设 $H_0:R\gamma=d$ 为真时，mQ 有 $x^2(m)$ 的条件极限分布：

$$mQ\Rightarrow(\hat{\sigma}_1^{+})^2(RV_2)'\left\{(\hat{\sigma}_1^{+})^2[0,R]H^{-1}\begin{pmatrix}0' \\ R'\end{pmatrix}\right\}^{-1}(RV_2)\sim x^2(m)。$$

值得注意的是，以上的分析并不依赖于 u_{1t} 和 u_{2t} 的具体的参数结构，所以从这个意义上说，改进的 OLS 方法是一种非参数的方法，有助于充分的最小二乘估计。

参考文献：

[1] 王志强.基于改进最小二乘支持向量机的最优解估计方法[J].计算机与应用,2013(11):27-28.

[2] 程延强.广义均方误差标准下双类估计优于最小二乘估计的充分条件[J].中国科教创新导刊,2008(10):21-23.

[3] 杨旸.相依误差下线性回归模型最小二乘估计的相合性[J].统计与决策,2014(4):31-33.

[4] 陈海清.广义 Pareto 分布参数的最小二乘估计[J].应用概率统计,2013(4):64-70.

[5] 尹小红.线性模型广义最小二乘估计的中偏差、重对数律与相对效率[J].湖南文理学院学报:自然科学版,2013(3):27-28.

(责任编校：夏玉玲)