第27卷第6期 唐山学院学报 Vol. 27 No. 6
2014年11月 Journal of Tangshan College Nov. 2014

再探非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美标号

吴跃生

(华东交通大学 理学院，南昌 330013)

摘要：讨论了非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美性，又给出了非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 是优美图的5个充分条件。

关键词：优美图；平衡二分图；非连通图；优美标号

中图分类号：O157.5 **文献标志码：**A **文章编号：**1672-349X(2014)06-0001-04

Re-exploration of the Graceful Labeling of the Unconnected Graph $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$

WU Yue-sheng

(School of Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: The author of this paper discusses the gracefulness of the unconnected graph $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ and put forward five sufficient conditions for the gracefulness of the unconnected graph.

Key Words: graceful graph; balanced bipartite graph; unconnected graph; graceful labeling

1 引言与概念

本文所讨论的图均为无向简单图，$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集，记号 $[m,n]$ 表示整数集合 $\{m,m+1,\cdots,n\}$，其中 m 和 n 均为非负整数，且满足 $0\leqslant m<n$。未说明的符号及术语均同文献[1]。

图的优美标号问题是组合数学中一个热门课题[1-14]。文献[2]已经证明非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1}$ 是优美图。

文献[14]讨论了非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美性，给出了非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 是优美图的一个充分条件：对任意正整数 m，如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+12m-3$ 标号值的交错图($12m-3\leqslant k+12m-3\leqslant |E(G)|$)，则非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 存在缺标号值 $k+1$ 的优美标号。

本文将继续讨论非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的优美性，给出非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 是优美图的另外5个充分条件。

定义1[3] G 是一个优美二部图，其优美标号为 θ，$V(G)$ 划分成两个集合 X,Y，如果 $\max\limits_{v\in X}\theta(v)<\min\limits_{v\in Y}\theta(v)$，则称 θ 是 G 的交错标号，称 G 是在交错标号 θ 下的交错图。

事实上，交错图就是平衡图，$\max\limits_{v\in X}\theta(v)=k$ 就是交错图关于交错标号的特征。

2 主要结论及其证明

定理1 对任意正整数 m，如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+12m-4$ 标号值的交错图($12m-4\leqslant k+12m-4\leqslant |E(G)|$)，则非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 存在缺标号值 $k+32m-9$ 的优美标号。

证明 把 $2C_{4(3m-1)}$ 中的一个圈记作 $C_{4(3m-1)}^{(1)}$，另一个记作 $C_{4(3m-1)}^{(2)}$，设 $V(C_{4(3m-1)}^{(1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4(3m-1)}\}$，$E(C_{4(3m-1)}^{(1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{12m-5}x_{12m-4},x_{12m-4}x_1\}$，$V(C_{12m-4}^{(2)})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{12m-4}\}$，$E(C_{4(3m-1)}^{(2)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{12m-5}y_{12m-4},y_{12m-4}y_1\}$，$V(C_{8m-1})=\{z_1,z_2,\cdots,z_{8m-1}\}$，$E(C_{8m-1})=\{z_1z_2,z_2z_3,\cdots,z_{8m-2}z_{8m-1},z_{8m-1}z_1\}$，设 X,Y 是图 G 的一个二分化，θ_1 是图 G 的交错标号，且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$，$|E(G)|=q$。

定义 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup G$ 的顶点标号 θ 为：

$$\theta(x_i)=\begin{cases}32m-\dfrac{i-1}{2}+k-10 & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\[2mm] 32m-\dfrac{i-1}{2}+k-11 & (i=6m-1,6m+1,\cdots,12m-5),\\[2mm] \dfrac{i}{2}+k & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases}$$

收稿日期：2014-05-26

基金项目：国家自然科学基金项目(11261019,11361024)

作者简介：吴跃生(1959—)，男，江西瑞金人，副教授，硕士，主要从事图论研究。

$$\theta(y_i)=\begin{cases}26m-\dfrac{i-1}{2}+k-9 & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 29m+k-9 & (i=6m-1)\\ 26m-\dfrac{i-1}{2}+k-8 & (i=6m+1,6m+3,\cdots,12m-7),\\ 44m+k-13 & (i=12m-5)\\ 6m+\dfrac{i}{2}+k-1 & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases}$$

$$\theta(z_i)=\begin{cases}12m+\dfrac{i+1}{2}+k-3 & (i=1,3,5,\cdots,8m-1)\\ 20m-\dfrac{i}{2}+k-4 & (i=2,4,6,\cdots,4m-2)\\ 6m+k-1 & (i=4m)\\ 20m-\dfrac{i}{2}+k-3 & (i=4m+2,4m+4,\cdots,8m-2)\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+32m-9, v\in Y\end{cases}。$$

下面证明 θ 是非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的优美标号。

(1)　$\theta: X\to[0,k]$是单射;$\theta: Y\to[k+32m-8,q+32m-9]-\{44m+k-13\}$是单射;

$\theta: V(C^{(1)}_{12m-4})\to[k+1,6m+k-2]\cup[26m+k-8,32m+k-10]-\{29m+k-9\}$是单射;

$\theta: V(C^{(2)}_{12m-4})\to[6m+k,12m+k-3]\cup[20m+k-4,26m+k-9]\cup\{29m+k-9,44m+k-13\}$是单射;

$\theta: V(C_{8m-1})\to[12m+k-2,20m+k-5]\cup\{6m+k-1\}$是单射;

因而,映射 $\theta: V(2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G)\to[0,q+32m-9]-\{k+32m-9\}$是单射。

(2)　$\theta': E(C^{(1)}_{12m-4})\to[20m-6,32m-11]$是双射;

$\theta': E(C^{(2)}_{12m-4})\to[8m,20m-7]\cup\{32m-10,32m-9\}$是双射;

$\theta': E(C_{8m-1})\to[1,8m-1]$是双射;

$\theta': E(G)\to[32m-8,q+32m-9]$是双射;

$\theta': E(2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G)\to[1,q+32m-9]$是一一对应。

由(1)和(2)可知,θ 就是非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的缺 $k+32m-9$ 标号值的优美标号。

定理 2　对任意正整数 m,如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+20m-6$ 标号值的交错图($20m-6\leqslant k+20m-6\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 存在缺标号值 $k+32m-9$ 的优美标号。

证明　把 $2C_{4(3m-1)}$ 中的一个圈记作 $C^{(1)}_{4(3m-1)}$,另一个记作 $C^{(2)}_{4(3m-1)}$,设 $V(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4(3m-1)}\}$,$E(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{12m-5}x_{12m-4},x_{12m-4}x_1\}$,$V(C^{(2)}_{12m-4})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{12m-4}\}$,$E(C^{(2)}_{4(3m-1)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{12m-5}y_{12m-4},y_{12m-4}y_1\}$,$V(C_{8m-1})=\{z_1,z_2,\cdots,z_{8m-1}\}$,$E(C_{8m-1})=\{z_1z_2,z_2z_3,\cdots,z_{8m-2}z_{8m-1},z_{8m-1}z_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$,$|E(G)|=q$。

定义 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}\dfrac{i+1}{2}+k & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ \dfrac{i+3}{2}+k & (i=6m-1,6m+1,\cdots,12m-5),\\ 32m-9-\dfrac{i}{2}+k & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases}$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}6m+\dfrac{i-1}{2}+k & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 3m+k & (i=6m-1)\\ 6m+\dfrac{i-3}{2}+k & (i=6m+1,6m+3,\cdots,12m-7),\\ 52m+k-15 & (i=12m-5)\\ 26m-\dfrac{i}{2}+k-8 & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases}$$

$$\theta(z_i)=\begin{cases}20m-\dfrac{i+1}{2}+k-6 & (i=1,3,5,\cdots,8m-1)\\ 12m+\dfrac{i}{2}+k-5 & (i=2,4,6,\cdots,4m-2)\\ 26m+k-8 & (i=4m)\\ 12m+\dfrac{i}{2}+k-6 & (i=4m+2,4m+4,\cdots,8m-2)\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+32m-9, v\in Y\end{cases}。$$

类似定理 1 的证明,可以证明 θ 就是非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的缺 $k+32m-9$ 标号值的优美标号。

定理 3　对任意正整数 m,如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+20m-5$ 标号值的交错图($20m-5\leqslant k+20m-5\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 存在缺标号值 $k+1$ 的优美标号。

证明　把 $2C_{4(3m-1)}$ 中的一个圈记作 $C^{(1)}_{4(3m-1)}$,另一个记作 $C^{(2)}_{4(3m-1)}$,设 $V(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4(3m-1)}\}$,$E(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{12m-5}x_{12m-4},x_{12m-4}x_1\}$,$V(C^{(2)}_{12m-4})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{12m-4}\}$,$E(C^{(2)}_{4(3m-1)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{12m-5}y_{12m-4},y_{12m-4}y_1\}$,$V(C_{8m-1})=\{z_1,z_2,\cdots,z_{8m-1}\}$,$E(C_{8m-1})=\{z_1z_2,z_2z_3,\cdots,z_{8m-2}z_{8m-1},z_{8m-1}z_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$,$|E(G)|=q$。

定义 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}\dfrac{i+3}{2}+k & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ \dfrac{i+5}{2}+k & (i=6m-1,6m+1,\cdots,12m-5),\\ 32m-8-\dfrac{i}{2}+k & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases}$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}6m+\frac{i+1}{2}+k & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 3m+1+k & (i=6m-1)\\ 6m+\frac{i-1}{2}+k & (i=6m+1,6m+3,\cdots,12m-7)\\ 52m+k-14 & (i=12m-5)\\ 26m-\frac{i}{2}+k-7 & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases},$$

$$\theta(z_i)=\begin{cases}20m-\frac{i+1}{2}+k-5 & (i=1,3,5,\cdots,8m-1)\\ 12m+\frac{i}{2}+k-4 & (i=2,4,6,\cdots,4m-2)\\ 26m+k-7 & (i=4m)\\ 12m+\frac{i}{2}+k-5 & (i=4m+2,4m+4,\cdots,8m-2)\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+32m-9, v\in Y\end{cases}。$$

类似定理 1 的证明,可以证明 θ 就是非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的缺 $k+1$ 标号值的优美标号。

定理 4　对任意正整数 m,如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+26m-7$ 标号值的交错图($26m-7\leqslant k+26m-7\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 存在缺标号值 $k+20m-5$ 的优美标号。

证明　把 $2C_{4(3m-1)}$ 中的一个圈记作 $C^{(1)}_{4(3m-1)}$,另一个记作 $C^{(2)}_{4(3m-1)}$,设 $V(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4(3m-1)}\}$, $E(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{12m-5}x_{12m-4},x_{12m-4}x_1\}$, $V(C^{(2)}_{12m-4})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{12m-4}\}$, $E(C^{(2)}_{4(3m-1)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{12m-5}y_{12m-4},y_{12m-4}y_1\}$, $V(C_{8m-1})=\{z_1,z_2,\cdots,z_{8m-1}\}$, $E(C_{8m-1})=\{z_1z_2,z_2z_3,\cdots,z_{8m-2}z_{8m-1},z_{8m-1}z_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$, $|E(G)|=q$。

定义 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}32m-\frac{i-1}{2}+k-9 & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 32m-\frac{i-1}{2}+k-10 & (i=6m-1,6m+1,\cdots,12m-5)\\ \frac{i}{2}+k & (i=2,4,6,\cdots,12m-6)\\ 58m-16+k & (i=12m-4)\end{cases},$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}26m-\frac{i-1}{2}+k-8 & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 29m+k-8 & (i=6m-1)\\ 26m-\frac{i-1}{2}+k-7 & (i=6m+1,6m+3,\cdots,12m-5)\\ 6m+\frac{i}{2}+k-2 & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases},$$

$$\theta(z_i)=\begin{cases}12m+\frac{i+1}{2}+k-4 & (i=1,3,5,\cdots,8m-1)\\ 20m-\frac{i}{2}+k-5 & (i=2,4,6,\cdots,4m-2)\\ 6m+k-2 & (i=4m)\\ 20m-\frac{i}{2}+k-4 & (i=4m+2,4m+4,\cdots,8m-2)\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+32m-9, v\in Y\end{cases}。$$

类似定理 1 的证明,可以证明 θ 就是非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的缺 $k+20m-5$ 标号值的优美标号。

定理 5　对任意正整数 m,如果图 G 是特征为 k 且缺 $k+26m-6$ 标号值的交错图($26m-6\leqslant k+26m-6\leqslant|E(G)|$),则非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 存在缺标号值 $k+12m-4$ 的优美标号。

证明　把 $2C_{4(3m-1)}$ 中的一个圈记作 $C^{(1)}_{4(3m-1)}$,另一个记作 $C^{(2)}_{4(3m-1)}$,设 $V(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1,x_2,\cdots,x_{4(3m-1)}\}$, $E(C^{(1)}_{4(3m-1)})=\{x_1x_2,x_2x_3,\cdots,x_{12m-5}x_{12m-4},x_{12m-4}x_1\}$, $V(C^{(2)}_{12m-4})=\{y_1,y_2,\cdots,y_{12m-4}\}$, $E(C^{(2)}_{4(3m-1)})=\{y_1y_2,y_2y_3,\cdots,y_{12m-5}y_{12m-4},y_{12m-4}y_1\}$, $V(C_{8m-1})=\{z_1,z_2,\cdots,z_{8m-1}\}$, $E(C_{8m-1})=\{z_1z_2,z_2z_3,\cdots,z_{8m-2}z_{8m-1},z_{8m-1}z_1\}$,设 X,Y 是图 G 的一个二分化,θ_1 是图 G 的交错标号,且 $\max\limits_{v\in X}\theta_1(v)=k<\min\limits_{v\in Y}\theta_1(v)=k+1$, $|E(G)|=q$。

定义 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的顶点标号 θ 为:

$$\theta(x_i)=\begin{cases}32m-9-\frac{i-1}{2}+k & (i=1,3,\cdots,12m-5)\\ \frac{i}{2}+k & (i=2,4,\cdots,6m-4)\\ \frac{i}{2}+k+1 & (i=6m-2,6m,\cdots,12m-6)\\ 58m-15+k & (i=12m-4)\end{cases},$$

$$\theta(y_i)=\begin{cases}6m+\frac{i-1}{2}+k-1 & (i=1,3,5,\cdots,6m-3)\\ 3m+k-1 & (i=6m-1)\\ 6m+\frac{i-1}{2}+k-2 & (i=6m+1,6m+3,\cdots,12m-5)\\ 26m-\frac{i}{2}+k-7 & (i=2,4,6,\cdots,12m-4)\end{cases},$$

$$\theta(z_i)=\begin{cases}20m-\frac{i+1}{2}+k-5 & (i=1,3,5,\cdots,8m-1)\\ 12m+\frac{i}{2}+k-4 & (i=2,4,6,\cdots,4m-2)\\ 26m+k-7 & (i=4m)\\ 12m+\frac{i}{2}+k-5 & (i=4m+2,4m+4,\cdots,8m-2)\end{cases},$$

$$\theta(v)=\begin{cases}\theta_1(v), v\in X\\ \theta_1(v)+32m-9, v\in Y\end{cases}。$$

类似定理 1 的证明,可以证明 θ 就是非连通图 $2C_{4(3m-1)}$

$\cup C_{8m-1} \cup G$ 的缺 $k+12m-4$ 标号值的优美标号。

定义 2[4-5]　$V(G)=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 的每个顶点 u_i 都粘接了 r_i 条悬挂边(r_i 为自然数,$i=1,2,\cdots,n$)所得到的图,称为图 G 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_n)$-冠,简记为 $G(r_1,r_2,\cdots,r_n)$。特别地,当 $r_1=r_2=\cdots=r_n=r$ 时,称为图 G 的 r-冠。图 G 的 0-冠就是图 G。

引理[4]　对任意正整数 m,任意自然数 r,则 $C_{4m}(r,r,\cdots,r)$ 存在特征为 $2m(r+1)-1$,且缺 $3m(r+1)$ 的交错标号。

注意到:$3m(r+1)=(2m(r+1)-1)+m(r+1)+1$,由定理 4 和引理有下面的推论。

推论　对任意正整数 m,当 $26m-8=n(r+1)$ 时,非连通图 $2C_{4(3m-1)} \cup C_{8m-1} \cup C_{4n}(r,r,\cdots,r)$ 存在缺标号值 $72m-22$ 的优美标号。

例 1　由推论,当 $m=1,n=18,r=0$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_{72}$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0,95,1,94,2,93,3,92,4,91,5,90,6,89,7,88,8,87,9,86,10,85,11,84,12,83,13,82,14,81,15,80,16,79,17,78,17,76,18,75,19,74,20,73,21,72,22,71,23,70,24,69,25,68,26,67,27,66,28,65,29,64,30,63,31,62,32,61,33,60,34,59,35,59。

由推论,当 $m=1,n=9,r=1$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_{36}(1,1,\cdots,1)$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0(95),94(1),2(93),92(3),4(91),90(5),6(89),88(7),8(87),86(9),10(85),84(11),12(83),82(13),14(81),80(15),16(79),78(17),18(76),75(19),20(74),73(21),22(72),71(23),24(70),69(25),26(68),67(27),28(66),65(29),30(64),63(31),32(62),61(33),34(60),59(35)。

由推论,当 $m=1,n=6,r=2$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_{24}(2,2,\cdots,2)$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0(95,94),93(1,2),3(92,91),90(4,5),6(89,88),87(7,8),9(86,85),84(10,11),12(83,82),81(13,14),15(80,79),78(16,17),18(76,75),74(19,20),21(73,72),71(22,23),24(70,69),68(25,26),27(67,66),65(28,29),30(64,63),62(31,32),33(61,60),59(34,35)。

由推论,当 $m=1,n=3,r=5$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_{12}(5,5,\cdots,5)$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0(95,94,93,92,91),90(1,2,3,4,5),6(89,88,87,86,85),84(7,8,9,10,11),12(83,82,81,80,79),78(13,14,15,16,17),18(76,75,74,73,72),71(19,20,21,22,23),24(70,69,68,67,66),65(25,26,27,28,29),30(64,63,62,61,60),59(31,32,33,34,35)。

由推论,当 $m=1,n=2,r=8$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_8(8,8,\cdots,8)$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0(95,94,93,92,91,90,89,88),87(1,2,3,4,5,6,7,8),9(86,85,84,83,82,81,80,79),78(10,11,12,13,14,15,16,17),18(76,75,74,73,72,71,70,69),68(19,20,21,22,23,24,25,26),27(67,66,65,64,63,62,61,60),59(28,29,30,31,32,33,34,35)。

由推论,当 $m=1,n=1,r=17$ 时,非连通图 $2C_8 \cup C_7 \cup C_4(17,17,17,17)$ 存在缺标号值 50 的优美标号为:

58,36,57,37,55,38,54,77;

53,40,52,41,56,42,51,43;

44,49,45,39,46,48,47;

0(95,94,93,92,91,90,89,88,87,86,85,84,83,82,81,80,79),78(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17),18(76,75,74,73,72,71,70,69,68,67,66,65,64,63,62,61,60),59(19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35)。

参考文献:

[1]　马克杰.优美图[M].北京:北京大学出版社,1991:1-247.

[2]　董俊超.$C_{4k} \cup C_{4k} \cup C_m$ 的优美性[J].烟台大学学报:自然科学与工程版,1999,12(4):238-241.

[3]　杨显文.关于 C_{4m} 蛇的优美性[J].工程数学学报,1995,12(4):108-112.

[4]　吴跃生.关于圈 C_{4h} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h})$—冠的优美性[J].华东交通大学学报,2011,28(1):77-80.

[5]　吴跃生,李咏秋.关于圈 C_{4h+3} 的 $(r_1,r_2,\cdots,r_{4h+3})$—冠的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版,2011,32(6):1-4.

[6]　吴跃生.关于图 $P_{6k+5}{}^3 \cup P_n{}^3$ 的优美性[J].吉首大学学报:自然科学版,2012,33(3):4-7.

[7]　吴跃生,徐保根.两类非连通图 $(P_2 \vee \overline{K_n})(0,0,r_1,0,\cdots,0,r_n) \cup St(m)$ 及 $(P_2 \vee \overline{K_n})(r_1+a,r_2,0,\cdots,0) \cup G_r$ 的优美性[J].中山大学学报:自然科学版,2012,51(5):63-66.

(下转第 7 页)

射为 Riemann 空间的特殊的 Riemann-Cartan 位形空间，因而本质上是一个完整约束系统的、具有辛结构的 Riemann-Cartan 位形空间。事实上，从式(10)可直接通过积分得到系统所受完整约束为：

$$(x^1-x^2)^2+(x^3)^2=0。\qquad(15)$$

3　结论

尽管就一般而言，Riemann-Cartan 位形空间中的挠率将破坏其辛结构，但确实存在一种特殊的、本质上具有辛结构的 Riemann-Cartan 位形空间。通过引入一个恰当的无约束的一阶线性不可积映射，可以将此类特殊的 Riemann-Cartan 位形空间映射为一个 Riemann 位形空间，这说明此类特殊的 Riemann-Cartan 位形空间本质上就是一个完整约束系统的位形空间。从力学的角度看，上述引入的无约束的一阶线性不可积映射相当于是此类特殊的 Riemann-Cartan 位形空间与一个完整约束系统的 Riemann 位形空间之间的"准坐标变换"。

参考文献：

[1]　梅凤翔. 分析力学[M]. 北京：北京理工大学出版社，2013：309.

[2]　Kleinert H，Shabanov S V. Space with torsion from embedding，and the special role of autoparallel trajectories[J]. Phys Lett B，1998，428：315－321.

[3]　Kleinert H，Pelster A. Autoparallels from a new action principle[J]. Gen Rel Grav，1999，31(9)：1439－1447.

[4]　Guo Y X，Wang Y，Chee G Y，et al. Nonholonomic versus vakonomic dynamics on a Riemann-Cartan manifold[J]. J Math Phys，2005，46(5)：062902.

[5]　王勇，郭永新. Riemann-Cartan 空间中的 d'Alembert-Lagrange 原理[J]. 物理学报，2005，54(12)：5517－5520.

[6]　王勇，郭永新，吕群松，等. 非完整映射理论与刚体定点转动的几何描述[J]. 物理学报，2009，58(8)：5142－5149.

[7]　Guo Yongxin，Liu Chang，Wang Yong，et al. Nonholonomic mapping theory of autoparallel motions in riemann-cartan space[J]. Science China(physics，mechanics & Astronomy)，2010(9)：1707－1715.

（责任编校：夏玉玲）

（上接第 4 页）

[8]　吴跃生. 图 $C_7(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,0)\cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2012，33(5)：9－11.

[9]　吴跃生，王广富，徐保根. 关于 C4h＋1⊙K1 的(Gr1，Gr2，…，Gr4h＋1，Gr4h＋2)－冠的优美性[J]. 山东大学学报，2013，48(4)：25－27.

[10]　吴跃生. 关于圈 C_{4h+3} 的 $(Gr_1,Gr_2,\cdots,Gr_{4h+3})$－冠的优美性[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2013，34(4)：4－9.

[11]　吴跃生，王广富，徐保根. 非连通图 $C_{2n+1}\cup G_{n-1}$ 的优美性[J]. 华东交通大学学报，2012，29(6)：26－29.

[12]　Gallian J A. A dynamic survey of graph labeling[J]. The Electronic Joumal of Combinatorics，2007，16(DS6)：1－58.

[13]　Jaromir Abrham，Anton Kotzig. All 2-regular graphs consisting of 4-cycles are graceful[J]. Discrete Mathematics，1994，135：1－14.

[14]　吴跃生. 非连通图 $2C_{4(3m-1)}\cup C_{8m-1}\cup G$ 的优美标号[J]. 唐山学院学报，2014，27(3)：12－14.

[15]　吴跃生. 非连通图 $G_{+e}\cup H_{k-1}$ 的优美性[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2014，35(2)：3－5.

[16]　吴跃生. 非连通图 $C_{4m-1}\cup G$ 的优美标号[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2014，35(3)：1－3.

[17]　贾慧羡，左大伟. 与扇图相关的 2 类图的超边优美标号[J]. 吉首大学学报：自然科学版，2014，35(2)：6－9.

（责任编校：夏玉玲）